無限小解析の基礎

＝微積分の新手法＝

キースラー　著

齋藤正彦　訳

東京図書株式会社

キースラー

無限小解析の基礎

齋藤正彦　訳

東京図書株式会社

訳者まえがき

数学の翻訳書の冒頭に訳者がしゃしゃりでるのは穏当でないが，まえがきをお読みになれば，私があえてこの形を選んだ理由がお分りいただけると思う．

ニュートンとライプニッツによって微積分が創始されてから三百年たつ．無限小量にもとづくライプニッツ流の理論は，そのすぐれた記号法とあいまって大いに発展した．しかし，ライプニッツ自身をはじめとする多くの学者の努力にも拘らず，無限小量を厳密に定義して扱うことは遂にできなかった．そのかわりに，コーシー，ワイアストラス，ボルツァノ等による有名な ε-δ 論法が微積分を基礎づけることになる．この一旦滅びた無限小量は，いまから二十年ほど前，A. ロビンソンによって復活された．超準解析と呼ばれるロビンソンの理論は射程の非常に大きいもので，無限小解析にとどまらず，純粋および応用数学の各分野での新手法として発展しつつある．

しかし，ロビンソンの理論は数学基礎論，特に新興のモデル理論に基づいているため，そのままの形で初等微積分の教育に使うことはできない．超準解析の推進者の一人であるキースラー教授は，初等微積分の展開に必要最小限の前提を，きわめて簡単な公理の形にまとめることに成功した．これを諸大学で実験しつつ本にしたのが《初等微積分（*Elementary calculus*, 1976)》および本書のもとである《無限小解析の基礎（*Foundations of infinitesimal calculus*)》の二つである．《初等微積分》は900ページもの本で，米国の大学初年級の教科書であるが，その内容の半分以上は日本の高等学校で教えることがらである．従って，公理は提示されているだけであり，また定理にも証明のないものが多い．

これに対し，《無限小解析の基礎》では公理系をみたす対象が構成されてい，定理はほとんどすべて証明されている．この本は本来は米国の大学上級用，教師用，数学者用の三つの目的で書かれているが，私は米国と日本との数学教育の実情の違いを考え，むしろこの本を大学初年級の教科書として訳出することにした．日本では，無限小を使う微積分教育はまだほとんど行われていない．この本が新手法の浸透への手助けになればまたとない幸いである．

原書と訳書との目的にずれがあるため，原書の内容のままでは教科書として不適当な部分がある．私はキースラー教授の許可を得て，いくつかの点で改変を施した．その主なものはつぎのとおりである．

1. 《初等微積分》の内容を参照している箇所については，削除，変更，追加のいずれかによって本書の完結性を確保した．

2. 原書にあった第1*章は削除した．その内容は一階の言語とそのモデル，上構造（superstructure），その超実数体系への適用，超フィルターによる超準モデルの構成等である．

3. 原書には例や図がほとんどなく，練習問題もないので，かなりの数の例と図を入れ，各節の終りに練習問題をつけた．それらのほとんどは《初等微積分》から借りたものである．

4. 三角関数，指数関数およびその逆関数は第7，8章ではじめて現われる．これでは不便なので，《初等微積分》にならって第2章に一節を追加し，無限小解析の立場からこれらの関数を直観的に導入してその基本性質を述べた．

5. 原書は不定積分の方法を扱っていない．これも《初等微積分》に散在する内容をまとめ，第4章の最後の節として加えた．

6. 級数の収束判定法や巾級数に関する事項も非常に不充分なので，やはり《初等微積分》にある内容を整理し，第9章の節Bを補完すると同時に，新たに節Dを置いた．

7. 著者の序文のうち，文献案内をあとがきにまわすとともに，学生にまったく不要と思われるものを除き，そのかわりに原書の出版以後に出た本および日本語の文献を追加した．

1979年2月　　齋藤正彦

序

1960年，エイブラハム・ロビンソンは三百年来の問題を解決し，無限小量にもとづいて微積分を厳密に展開することに成功した．これは今世紀最大の数学的業績の一つだろう．本書は，ロビンソンの無限小解析を大学上級の教科用[†]にまとめたものである．内容は出版したての私の初級教科書《初等微積分》と密接に関係しているが，もちろんこれ自身としても完結している．私はこの本につぎの三重の目的をになわせたい．すなわち，無限小解析をてっとり早く知りたい数学者の参考書として，《初等微積分》を教科書に使う教師の参考書として，また学生のセミナー用の教科書として．

微積分の基本理念は，17および18世紀に，直観的な無限小量の概念にもとづいて発展した．しかし，数学者たちは無限小量を厳密に扱う方法を見つけることができず，19世紀中に遂に無限小量は追放される．そのかわりに有名な ε-δ 論法が確立し，これによって微積分の厳密な扱いがはじめて可能になる．それ以来ずっと学生たちは，無限小量なんてものはない，そんなものを使ってはいけない，と教えられ続ける．

ところが，ライプニッツの伝統を復活したロビンソンの方法によれば，実数体に無限小量を付け加えることによって超実数体が得られ，それは微積分だけでなく，解析学全般での新しい強力な道具となる．ロビンソンのこの発見がこんなにもおそかったのは，超実数体を記述するための公理が，ごく最近まで数学者に知られていなかったたちのものだからだ．実際，ロビンソンの方法は，1950年以後に出てきた《モデル理論》と呼ばれる数学基礎論の一分野にもとづくものだった．

それは実数論の超準モデルを使うので，ロビンソンは自分の理論を超準解析(nonstandard analysis)と名付けた．しかし，昔からの呼び名である無限小解析の方が適切ではないかと私は思う[††]．この方法は驚くほど適応性に富み，純粋お

---

†）（訳注） 日本ではほぼ大学初年級に当る．

††）（訳注） 以後，《無限小解析》は本来の無限小解析だけでなく，超準解析全般をも指す．

よび応用数学の広範な分野に影響を与えるように見える．たとえば，それは経済学や物理学のような分野でも，新しい数学モデルを提供しはじめている．

本書の目的は，《初等微積分》の場合と同様，数学者および学生に無限小解析を理解させることである．無限小の導入により，微積分を展開するに当って本来の直観性が回復でき，学生の理解が容易になる．《初等微積分》は，無限小解析を可能なかぎり初等的な段階で扱った．そのため，著者の判断で，定理を証明するかわりに，定理をもっともらしく見せる議論ですませたところがある．この本は同じ主題をもっと高い観点から扱い，定理の大部分に完全な証明を与える．

第１章でまず超実数体を導入し，その公理を述べ，引きつづいて超実数体の基本性質を調べる．つぎに節1Eで，実数体をもとに簡単な方法で超実数体を構成してみせる．第２章から最後の第12章まで，第１章の公理系にもとづいて無限小解析を展開する．予備知識はほとんどいらない．特に，数学基礎論の諸概念は一切使わない．ただ，集合についてのよく知られた概念や記号は使う．たとえば関数の概念，空集合$\varnothing$，合併 $A\cup B$，集合 $\{x\in A ;\ P(x)\}$ 等々．

冒頭の公理系を除けば，本書の内容はすべて既存の無限小解析の本（特にロビンソンのものやストロイアンのもの，あとがきを見よ）または伝統的な微積分の教科書に含まれている．ただ，この公理系によってこそ，数学基礎論と無関係に，大学初年級用に無限小解析を記述することが可能になったのである．古典的な結果のいくつかには無限小を使う新らしい証明を付けた．また，古典的であっても，初等微積分の範囲を越える結果のいくつかは，無限小を使うもっと簡単な結果に置きかえた．たとえば無限和定理や二変数の大域最大値判定法等である．

最後に，ウィスコンシン大学およびカリフォルニア大学ロスアンジェルス校のジョン・バーワイズ，サスカチュワン大学のドナルド・マッキリカン，アイオワ大学のキース・ストロイアンに，この本を書くに際して受けた貴重な助言に関して感謝の意を表明する．また，スー・バルシガーにはその見事なタイプについて感謝する．

H. ジェローム・キースラー

目　　次

1 超 実 数

実数の体系についてはすでに読者は知っていると仮定し，これから新しい対象である超実数の体系について述べる．実数の定義およびその存在と一意性については，この章の終りの付録 1F に簡単に説明しておいた．この付録には現代代数の有用な概念のいくつか，たとえば環，完備順序体，イデアル，準同型などの解説も含まれている．これらの用語を知らない場合には，付録を見ればよい．とにかく，現代代数の知識は，ごくちょっとの用語以外は何もいらない．

節 1A から 1D までで超実数の公理を導入し，それからすぐに出る結果をいくつか導き出す．節 1E で超実数の簡単な構成法を示す．すなわち，我々の公理をみたす構造が存在することを証明する．

1A 超実数の構造

この節ではつぎの二つの公理だけを仮定する：

公理 A　　$\boldsymbol{R}$ は完備順序体である．

公理 B　　$\boldsymbol{R}^*$ は $\boldsymbol{R}$ の真拡大順序体である．

$\boldsymbol{R}$ を**実数体**，$\boldsymbol{R}^*$ を**超実数体**と言う．$\boldsymbol{R}$ の元を実数，$\boldsymbol{R}^*$ の元を**超実数**と言う．つぎの節で，微積分に必要な強い公理を二つ追加する．しかし，超実数直線の直観を支える無限小の代数的性質は上の公理 A, B だけから出る．

定義　　x を $\boldsymbol{R}^*$ の元とする．あらゆる正実数 r に対して $|x|<r$ が成りたつとき，x を**無限小超実数**と言う．ある実数 r に対して $|x|<r$ が成りたつとき，x を**有限超実数**と言う．どんな実数 r に対しても $|x|>r$ となるとき，x を**無限大超実数**と言う．

二つの超実数 x, y に対し，$x-y$ が無限小のとき，x と y とは互いに**無限に近い**と言い，$x \approx y$ と書く．（したがって，$x \approx 0$ のときに限って x は無限小である．）

無限小実数は 0 だけしかない．しかし，0 でない無限小超実数は存在することが証明される（定理 8）．

定義　　超実数 x に対し，集合

$$\text{monad}(x)=\{y\in \boldsymbol{R}^*\,;\,x\approx y\}$$

を x の**単子**と言う．また，集合

$$\text{galaxy}(x)=\{y\in \boldsymbol{R}^*\,;\,x-y \text{ が有限}\}$$

を x の**銀河**と言う．

0の単子は無限小超実数の全体，0の銀河は有限超実数の全体である．図1は単子の一部を図示するための無限小顕微鏡，および無限に遠くにある銀河の一部を図示するための無限遠望遠鏡を示す．無限小顕微鏡および無限遠望遠鏡の厳密な使いかたは節2Bで示す．

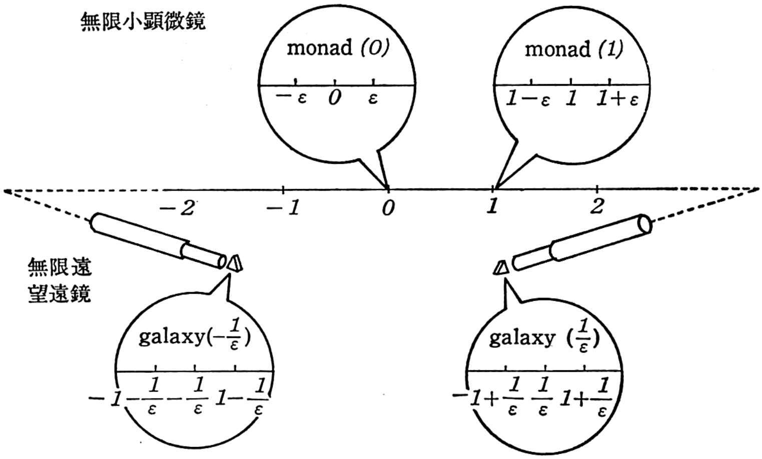


図 1

これから $\boldsymbol{R}^*$ の代数構造を調べる．

定理 1　0の銀河 galaxy(0) は $\boldsymbol{R}^*$ の部分環である．すなわち，二つの有限超実数の和，差，積はまた有限である．

証明　x, y が有限超実数なら，ある実数 r, s に対して

$$|x|<r, \qquad |y|<s$$

となる．したがって

$$|x+y|<r+s, \quad |x-y|<r+s, \quad |xy|<rs$$

が成りたつから，$x+y$，$x-y$，xy は有限である．　⊣

系 2　二つの銀河は一致するか，または共通点をもたない．

証明　galaxy(x) と galaxy(y) とが共通な点 z をもつとする．galaxy(x)

の任意の点 w に対し，$w-x$, $x-z$, $z-y$ はすべて有限，したがって $w-y=(w-x)+(x-z)+(z-y)$ も有限であり，w は galaxy(y) に属する．すなわち galaxy$(x)\subseteq$galaxy(y)．同様に galaxy$(y)\subseteq$galaxy(x) となる． ⊣

定理 3 無限小の全体 monad(0) は $\boldsymbol{R}^*$ の部分環であり，galaxy(0) のイデアルである．すなわち，

(i) 二つの無限小超実数の和，差，積はまた無限小であり，

(ii) 無限小超実数と有限超実数との積は無限小である．

証明 (i) ε, δ を無限小超実数とする．任意の正実数 r に対して $|\varepsilon|<\frac{r}{2}$, $|\delta|<\frac{r}{2}$ だから，$|\varepsilon+\delta|<r$, $|\varepsilon-\delta|<r$ が成りたち，したがって $\varepsilon+\delta$, $\varepsilon-\delta$ は無限小である．また，$|\varepsilon|<r$, $|\delta|<1$ だから $|\varepsilon\delta|<r$, したがって $\varepsilon\delta$ も無限小である．

つぎに b を有限超実数とすると，ある実数 t に対して $|b|<t$ となる．任意の正実数 r に対し，$|\varepsilon|<\frac{r}{t}$ だから $|b\varepsilon|<\frac{r}{t}\cdot t=r$ が成りたつ．すなわち εb は無限小である． ⊣

系 4 二つの単子は一致するか，または共通点をもたない．関係 $x\approx y$ は $\boldsymbol{R}^*$ 上の同値関係である（同値関係の定義は節 1 F を見よ）．

証明 monad(x) と monad(y) とが共通点 z をもつとする．monad(x) の任意の点 w に対し，$w-x$, $x-z$, $z-y$ はすべて無限小，したがって $w-y=(w-x)+(x-z)+(z-y)$ も無限小であり，w は monad(y) に属する．だから monad$(x)\subseteq$monad(y)．同様に monad$(y)\subseteq$monad(x) が成りたち，monad(x) ＝monad(y) となる．つぎに，単子および関係 $x\approx y$ の定義により，

$$x\approx y \Longleftrightarrow \mathrm{monad}(x)=\mathrm{monad}(y)$$

が成りたつことが分る．だから $x\approx y$ は同値関係である． ⊣

定理 5 (i) x が無限大であるのは x^{-1} が無限小の場合である．

(ii) monad(0) は galaxy(0) の極大イデアルである．すなわち，galaxy(0) のイデアル I で，

$$\mathrm{monad}(0)\subsetneqq I\subsetneqq \mathrm{galaxy}(0)$$

となるものはない．

証明 (i) つぎの三条件は同値である：

$$\text{あらゆる実数 } r \text{ に対して } |x| \geqslant r.$$
$$\text{あらゆる実数 } r \text{ に対して } |x^{-1}| \leqslant r^{-1}.$$
$$x^{-1} \text{ は無限小}.$$

(ii)　monad(0) より大きいイデアル I があったとし，$I-\text{monad}(0)$ の元 b を取る．$b=(b^{-1})^{-1}$ は無限小でないから，(i)によって b^{-1} は無限大ではない．すなわち $b^{-1}\in\text{galaxy}(0)$ だから $1=b\cdot b^{-1}\in I$ となる．galaxy(0) の任意の元 c に対し，$c=1\cdot c\in I$ となり，$I=\text{galaxy}(0)$ となる．　⊣

定理 6（標準部分定理）　任意の有限超実数はちょうど一つの実数に無限に近い．すなわち，任意の有限超実数の単子は実数をちょうど一つ含む．

証明　x を有限超実数とする．

一意性：r, s が実数で，$r\approx x$，$s\approx x$ とする．関係 $\approx$ は同値関係だから $r\approx s$，したがって $r-s\approx 0$．しかし，$r-s$ は実数だから $r-s=0$，すなわち $r=s$ である．

存在：　$X=\{s\in \boldsymbol{R}\,;\, s<x\}$ と置くと，X は空でなく，上に有界である．実際，ある実数 r に対して $|x|<r$，すなわち $-r<x<r$ が成りたつから，$-r$ は X に属し，r は X の一つの上界である．そこで X の上限を t とする．任意の正実数 r に対し，

$$x\leqslant t+r \quad \text{したがって} \quad x-t\leqslant r,$$
$$t-r\leqslant x \quad \text{したがって} \quad -(x-t)\leqslant r$$

となるから $x-t\approx 0$，すなわち $x\approx t$ が成りたつ．　⊣

定義　有限超実数 x に対し，$x\approx r$ となる唯一つの実数 r を x の**標準部分** (standard part) と言い，$r=st(x)$ と書く．x が無限大のときは $st(x)$ は定義されない．

系 7　有限超実数 x, y に対し，

(i)　$x\approx y \Longleftrightarrow st(x)=st(y)$.

(ii)　$x\approx st(x)$.

(iii)　$r\in\boldsymbol{R}$ なら $st(r)=r$.

(iv)　$x\leqslant y$ なら $st(x)\leqslant st(y)$.

証明　(iv) だけやる．ある無限小超実数 ε, δ を取ると，

$$x=st(x)+\varepsilon, \qquad y=st(y)+\delta$$

と書ける．$x\leqslant y$ ならば，

$$st(x)+\varepsilon \leqslant st(y)+\delta \text{ だから}$$

$$st(x) \leqslant st(y)+(\delta-\varepsilon)$$

が成りたつ．任意の正実数 r に対し，$\delta-\varepsilon<r$ だから

$$st(x) \leqslant st(y)+r$$

となり，したがって $st(x) \leqslant st(y)$ となる． ⊣

定理 8 （ i ） 正および負の無限小超実数が存在する．

（ ii ） 正および負の無限大超実数が存在する．

証明 $\boldsymbol{R}^*$ は $\boldsymbol{R}$ より真に大きいから．$\boldsymbol{R}^*-\boldsymbol{R}$ の元 x が存在する．x が有限超実数なら $|x-st(x)|$ は正の無限小である．x が無限大なら．定理 5 によって $\left|\frac{1}{x}\right|$ は正の無限小である．したがって正の無限小超実数 ε が存在する．$-\varepsilon$, $\frac{1}{\varepsilon}$, $-\frac{1}{\varepsilon}$ はそれぞれ負の無限小，正の無限大，負の無限大である． ⊣

無限小超実数も無限大超実数も無限にたくさんある．しかも，一つの銀河は無限に多くの単子に分割される．一つ一つの単子は複雑な構造をもつ．たとえば，x が超実数であるとき，無限大超実数 H に $x+\frac{1}{H}$ を対応させると無限大超実数の全体から monad$(x)-\{x\}$ への双射，すなわち一対一，上への写像ができる．

monad(0) は galaxy(0) のイデアルだが，$\boldsymbol{R}^*$ のイデアルではなく，単なる部分環だということを忘れてはいけない．すなわち，無限小と無限大との積は無限小とは限らない．実際，正の無限小超実数 ε に対し，

$\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon}$ は無限小，

$\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon}$ は有限，しかし無限小ではなく，

$\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}$ は無限大である．

これは，$0 \cdot \infty$ が《不定形》だという直観的な原則に対応している．

標準部分に関する重要な結果でこの節を終ろう．

定理 9 標準部分をとる写像 st は環 galaxy(0) から実数体の上への準同型写像である．すなわち，有限超実数 x, y に対し，

（ i ） $st(x+y)=st(x)+st(y)$,

（ ii ） $st(x-y)=st(x)-st(y)$,

（iii）　$st(xy)=st(x)\cdot st(y)$.

証明　$r=st(x)$, $s=st(y)$ とし，$x=r+\varepsilon$, $y=s+\delta$ と書く．ε, δ は無限小超実数である．

（i）　$st(x+y)=st((r+\varepsilon)+(s+\delta))$

$$=st((r+s)+(\varepsilon+\delta))$$

$$=r+s.$$

（ii）は（i）と同様.

（iii）

$$st(xy)=st((r+\varepsilon)(s+\delta))$$

$$=st(rs+r\delta+s\varepsilon+\varepsilon\delta)$$

$$=rs \quad (r\delta+s\varepsilon+\varepsilon\delta \text{ は無限小だから}).$$

よって写像 st は galaxy(0) から $\boldsymbol{R}$ への準同型写像である．$r\in\boldsymbol{R}$ なら $st(r)=r$ だから，明らかにこの写像は上射（$\boldsymbol{R}$ の上への写像）である．　⊣

系 10　x, y を有限超実数とする．

（i）　$st(y)\neq 0$ なら $st\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{st(x)}{st(y)}$.

（ii）　$y=\sqrt[n]{x}$ なら $st(y)=\sqrt[n]{st(x)}$.

証明　（i）　$st(x)=st\left(\dfrac{x}{y}\cdot y\right)=st\left(\dfrac{x}{y}\right)\cdot st(y)$.

（ii）　$st(x)=st(y^n)=(st(y))^n$.　⊣

練 習 問 題 1A

ε, δ を 0 でない無限小，H, K を無限大とする．つぎの諸量の大きさ，すなわち a) 無限小であるか，b) 無限小でなく有限であるか，c) 無限大であるかを判定せよ．c) 以外の場合，その標準部分を求めよ．

（1）$\dfrac{3\varepsilon^3+\varepsilon^2-6\varepsilon}{2\varepsilon^2+\varepsilon}$　（2）$\dfrac{3-2\varepsilon}{4+3\delta}$　（3）$\dfrac{2H^2+H}{H^2-H+2}$

（4）$\sqrt{H+1}-\sqrt{H-1}$　$(H>0)$　（5）$\dfrac{\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}+1}$　$(\varepsilon>0)$

（6）$\dfrac{H+K}{HK}$　（7）$\dfrac{H-K}{H^2+K^2}$　（8）$\dfrac{\varepsilon}{5-\sqrt{25+\varepsilon}}$

（9）$\sqrt{a+\varepsilon}\sqrt{a+\delta}$　$(st(a)=3)$　（10）$\left(H+\dfrac{1}{H}\right)^2-\left(H-\dfrac{1}{H}\right)^2$

（11）$\left(H+\dfrac{\varepsilon}{H}\right)^2-\left(H-\dfrac{\varepsilon}{H}\right)^2$　（12）$\dfrac{\dfrac{1}{a+\varepsilon}-\dfrac{1}{a}}{\varepsilon}$　（a は 0 でない実数）

(13) $\dfrac{1-\sqrt[3]{1+\varepsilon}}{\varepsilon}$ (14) $H-\sqrt{H+1}\sqrt{H+2}$

(15) $\dfrac{3-\sqrt{c+2}}{c-7}$ $(st(c)=7,\ c\neq 7)$ (16) $\dfrac{\sqrt{25-\varepsilon}-5}{\varepsilon}$ (17) $\dfrac{\varepsilon+\delta}{\sqrt{\varepsilon^2+\delta^2}}$

(18) $\dfrac{H+K}{\sqrt{H^2+K^2}}$ (19) $2H\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{H}}-1\right)$ $(H>0)$

(20) $\dfrac{\sqrt{H+1}}{\sqrt{2H}+\sqrt{H-1}}$ $(H>0)$ (21) $H(\sqrt{H^2+4}-H)$ $(H>0)$

1B 超実数の公理

節1Aではじめの二つの公理を出した．残る二つの公理をきちんと述べる前に直観的な考えかたを書いておこう．実数体と超実数体とは＊という写像によってつぎのように結びついている：

（1） $\boldsymbol{R}$ 上の任意の関係 X に対し，X の**自然延長**または**自然拡大**と称する $\boldsymbol{R}^*$ 上の関係 X^* が対応している．

（2） $\boldsymbol{R}$ 上の関係はすべてその $\boldsymbol{R}^*$ への自然延長と同じ《初等性質》を共有する．

(2) を正確に説明するのは難かしい．それには《初等性質》とは何であるかを説明しなければならない．たとえば，《$X\subseteq Y$》とか《X は関数である》とか，また《Xは交換法則をみたす二項演算である》等はどれも初等性質である．これに反し，アルキメデス性や完備性は初等性質ではない． 実際，$\boldsymbol{R}$ の真の順序拡大体で，アルキメデス的だったり完備だったりするものはない．これらのことを説明する場合，《初等性質》とは一階の論理における文のことだと定義するのが普通である．しかし，新入生はまともな例を一つも知らないのだから，微積分を始める前に一階の論理を説明するのは適当でない．むしろまず微積分をやり，ある段階に達したところで ε-δ 論法を使い，それを一階の論理における有意義な例として示す方がよい．幸い，《一階の論理における文》という概念は，我々の公理を述べるためには全然必要ない．新入生がすでに知っている簡単な概念だけで充分であることが分る．それは，方程式および不等式の有限系という概念である．

初等微積分の主な対象は実 n 変数の部分関数（$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合上の関数）である．だから，我々は本節冒頭の(1)で，《関係》を《部分関数》に置きかえたものに相当する公理を立てようと思う．そのつぎに，(2) の《初等性質》をこれらの

関数に関する方程式・不等式系と解釈したものに相当する公理を立てる．

以下しばらく，方程式・不等式系とは何かを正確に説明する．

n 個の実数の組の全体を $\boldsymbol{R}^n$ と書く．$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合から $\boldsymbol{R}$ への写像を n 変数の**実関数**と言う．

文字 $x, y, z, \cdots\cdots$ を**変数**と言う．変数は実数の全体 $\boldsymbol{R}$ を走ると考える．$\boldsymbol{R}$ の元（実数）c を**定数**と言う．変数および定数に実関数を何回か施して得られる式を**項**と言う．たとえば，

$$x,\ \ c,\ \ x+c,\ \ f(x),\ \ g(c, x, f(y))$$

はどれも項である．項の正確な定義はつぎのとおり：

(T 1)　変数は項である．

(T 2)　実定数は項である．

(T 3)　$\tau_1, \cdots, \tau_n$ が項で，f が n 変数実関数なら，$f(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ は項である．

変数を含まない項を**定項**と言う．定項は，定義されないか，またはある実数に等しい値をもつ．たとえば f が一変数関数のとき，実数 c が f の定義域に入っていなければ定項 $f(c)$ は定義されない．c が f の定義域にあって $f(c)=d$ ならば，定項 $f(c)$ の値は d である．定項の値は段階的に計算される．たとえば，

$$g[f(5)+3, f(f(2))]$$

の値を計算するには，まず $f(5)$，つぎに $f(5)+3$ を計算し，一方まず $f(2)$，つぎに $f(f(2))$ を計算し，最後に $g[f(5)+3, f(f(2))]$ を計算すればよい．計算の途中で一箇所でも定義されないところがあれば，全体の定項が定義されないとみなす．たとえば，実数の範囲では $\sqrt{-6}$ は定義されないから，$\sqrt{-6}-\sqrt{-6}$ とか $\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-6}}$ などの定項も定義されない．

方程式とは $\sigma=\tau$ の形の式である．ただし σ, τ は項である．**不等式**とは

$$\sigma\leqq\tau,\ \ \sigma<\tau,\ \ \sigma\neq\tau$$

のうちどれかの形の式である．ただし σ, τ は項である．二つの項の間の方程式および不等式を合わせて**式**と言う．式の有限集合を**式系**と言う（有限性に注意！）．

最後に，解の概念が必要である．変数 $x_1, \cdots, x_n$ を含む式系 S を考える．S の**解**とは，n 個の定数の組 $(c_1, \cdots, c_n)$ で，S の各式の中のすべての x_i に c_i を代入したとき，得られる式の両辺が定義され，しかもその式がすべて正しくなるよ

うなものを言う.

たとえば，自明な方程式

$$f(x)=f(x)$$

の解集合は，実数の全体ではなく，f の定義域である．すなわち，$f(c)$ が定義されないときは，c は方程式 $f(x)=f(x)$ の解ではない.

式系の概念を理解するのはやさしいだろう．《応用問題》を解く第一手は，問題を式系の形に書くことなのだから.

さて，既出の二つの公理も含め，四つの公理を挙げる．それは，三つ組（$\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}^*$, $*$）に関するものであり，$\boldsymbol{R}$ は**実数体**，$\boldsymbol{R}^*$ は**超実数体**，$*$ は**自然延長写像**と呼ばれるものである.

公理 A　$\boldsymbol{R}$ は完備順序体である.

公理 B　$\boldsymbol{R}^*$ は $\boldsymbol{R}$ の真拡大順序体である.

公理 C（関数の公理）　任意の n 変数実関数 f に対し，f の**自然延長**と呼ばれる n 変数超実関数 f^* が対応する．特に，$\boldsymbol{R}^*$ の体演算は $\boldsymbol{R}$ の体演算の自然延長である.

公理 D（解の公理）　二つの式系がちょうど同じ実解をもつ[†]ならば，それらはちょうど同じ超実解をもつ.

ただし，式系 S の**超実解**とはつぎのものである．S が変数 $x_1, \cdots, x_n$ を含むとしよう．n 個の超実数の組（$c_1, \cdots, c_n$）が S の超実解であるとは，S の式に現われるあらゆる関数に $*$ を付け，各変数 x_i に c_i を代入したとき，得られる式の両辺が定義され，しかもその式がすべて正しくなることである.

解の公理はつぎのように説明することができる．実関数 f はつぎの形で定義されることが多い：

$$f(x_1, \cdots, x_n)=y \Longleftrightarrow S \text{ が成りたつ.}$$

ただし S は式系である．たとえば $f(x)=x^2$ のときは S は一つの方程式 $x^2=y$ であり，$f(x)=\sqrt{x}$ のときは S は式系 $x=y^2$, $y\geqslant 0$ である．解の公理の特別の場合としてつぎのことが言える：

実関数 f が

---

†）（訳注）この二つの式系それぞれの実解全部の集合が一致するという意味である．以下，《同じ実解（または超実解）をもつ》という表現は，つねにこのことを意味するものとする.

$$f(x_1, \cdots, x_n)=y \Longleftrightarrow S \text{ が成りたつ}$$

によって定義されていれば，f の自然延長 f^* は同じ条件を超実数に適用したものによって定義される．

たとえば $f(x)=\sqrt{x}$ は，式系

$$0 \leqslant y, \qquad y^2=x$$

によって定義されるから，$f^*(x)=\sqrt{x}$ は，同じ式系で x, y が超実数を走ると思ったものによって定義される．

練 習 問 題 1B

1.　つぎの関数の定義域は何か．

（1）　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}\,(x-2)}$　　（2）　$f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

（3）　$f(x, y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

2.　つぎの式系 S の実解の全体は何か．

（1）　$x=x$　　（2）　$x=y$　　（3）　$x<y$　　（4）　$\sqrt{x}=\sqrt{x}$　　（5）　$x \neq x$

1C　解の公理からの帰結

解の公理は一見何でもないようだが，実は非常に強力である．論理の諸概念を必要とすることは省略し，ここでは解の公理から簡単に導かれる一般的な結果について述べる．これは微積分の展開に大いに役立つ．そのあとで，我々の公理系A—Dをちょっと変えた公理系を紹介し，この二つの同値性を証明する．

定理 1　（i）　式系Sがあらゆる実数に対して正しければ，それはあらゆる超実数に対しても正しい．

（ii）　式系Sが実解をもたなければ，それは超実解も持たない．

証明　（i）　仮定により，Sは一つの方程式 $x=x$ と同じ実解をもつ．解の公理により，Sは $x=x$ と同じ超実解をもつ．すなわちSはあらゆる超実数に対して正しい．

（ii）　$x=x$ のかわりに $x \neq x$ を使えばよい．　⊣

注意　式系に含まれる式の数は有限個でなければいけない．たとえばxを変数としてもつ無限個の不等式

$$x>0,\ x<1,\ x<\frac{1}{2},\ x<\frac{1}{3},\ \cdots$$

を考えると，これは実解をもたない．しかし，任意の正の無限小超実数はこれの超実解である．

定理 2　fをn変数の実関数とし，$c_1, \cdots, c_n$ を実数とする．

（i）$f(c_1, \cdots, c_n)$ が定義されていれば $f^*(c_1, \cdots, c_n)=f(c_1, \cdots, c_n)$．

（ii）$f(c_1, \cdots, c_n)$ が定義されていなければ，${}^*f(c_1, \cdots, c_n)$ も定義されない．

証明（i）$f(c_1, \cdots, c_n)=c$ とすると，式系

$$f(c_1, \cdots, c_n)=c, \qquad x=x$$

はあらゆる実数に対して正しい．したがってあらゆる超実数に対しても正しい．だから $f^*(c_1, \cdots, c_n)=c$．

（ii）$f(c_1, \cdots, c_n)$ が定義されていなければ，式系

$$f(c_1, \cdots, c_n)=f(c_1, \cdots, c_n), \qquad x=x$$

は実解をもたない．したがって超実解も持たない．だから $f^*(c_1, \cdots, c_n)$ は定義されない．　⊣

注意　本書で，$f(a_1, \cdots, a_n)=g(b_1, \cdots, b_n)$ と書く場合，これは《両辺とも定義されていてしかも等しい》ということを意味する．

今後，誤解の恐れのないかぎり，関数の自然延長の記号＊は省き，$c_1, \cdots, c_n$ が実数であっても超実数であっても，f^* の $(c_1, \cdots, c_n)$ での値を $f(c_1, \cdots, c_n)$ と書く．

注意　超実数にその標準部分を対応させる関数 st はいかなる実関数の自然延長でもない．実際，関数 st の定義域は有限超実数の全体であり，等式 $st(x)=x$ はあらゆる実数に対して成りたつが，あらゆる超実数に対しては成りたたない．この関数 st は，我々の扱う関数のうち，実関数の自然延長でない唯一つのものである．

関数や関係についての性質を式系の形で書くと都合のよいことが多い．Pを性質，Fを式とする．これらが同じ実解および同じ超実解をもつとき，PはFに**同値**であると言う．

定理 3　fをn変数の実関数とする．つぎの性質はある方程式に同値である：

（i） $f(x_1, \cdots, x_n)$ は定義される．

（ii） $f(x_1, \cdots, x_n)$ は定義されない．

証明　（i） 解の定義により，性質（i）は方程式

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n)$$

に同値である．

（ii） f の定義域の特性関数を g とする：

$$g(x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} 1 & f(x_1, \cdots, x_n) \text{ が定義されるとき,} \\ 0 & f(x_1, \cdots, x_n) \text{ が定義されないとき.} \end{cases}$$

性質（ii）が方程式 $g(x_1, \cdots, x_n)=0$ に同値なことを示す．まず，方程式

$$g(x_1, \cdots, x_n) = g(x_1, \cdots, x_n)^2$$

はあらゆる実数に対して成りたつから，あらゆる超実数に対しても成り立つ．したがって $g(x_1, \cdots, x_n)$ はあらゆる超実数で定義され，その値は0か1かである．さらにつぎの二つの方程式

$$g(x_1, \cdots, x_n) = 1 \qquad (1)$$

$$f(x_1, \cdots, x_m) = f(x_1, \cdots, x_n) \qquad (2)$$

は同じ実解，したがって同じ超実解をもつ．したがって，任意の超実数 $c_1, \cdots, c_n$ に対し，

$$\begin{aligned} & f(c_1, \cdots, c_n) \text{ は定義されない} \\ \Longleftrightarrow\ & (c_1, \cdots, c_n) \text{ は (2) の解でない} \\ \Longleftrightarrow\ & (c_1, \cdots, c_n) \text{ は (1) の解でない} \\ \Longleftrightarrow\ & g(c_1, \cdots, c_n) = 0 \end{aligned}$$

となる．　⊣

定理4　S, T を式系とする．S の実解がすべて T の実解ならば，S の超実解はすべて T の超実解である．

証明　仮定により，S および $S \cup T$ は同じ実解，したがって同じ超実解をもつ．すなわち S の超実解は T の解でもある．　⊣

つぎに定理4を一般化し，T が S より多くの変数をもつ場合を扱う．

定義　式系 T が変数 $x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n$ をもつとする．k 個の実数の組 $(c_1, \cdots, c_k)$ に対し，適当に $n-k$ 個の実数を見つけて T の実解 $(c_1, \cdots, c_k, \cdots, c_n)$ が得られるとき，$(c_1, \cdots, c_k)$ を T の**部分実解**と言う．**部分超実解**も同様に定義される．

例 1　変数 x, y をもつ式系 T として一つの式 $x=y^2$ を考える．x に代入すべき実数 c として，$c \geqq 0$ なら c は T の部分実解であり，$c<0$ なら c は T の部分実解でない．

つぎの定理は，超実数を使って微積分を展開する際のカギとなる．

定理 5（部分解定理）　変数 $x_1, \cdots, x_k$ をもつ式系 S および変数 $x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n$ をもつ式系 T に対し，つぎの三条件は互いに同値である：

（i）　S の実解はすべて T の部分実解である．

（ii）　S の実解はすべて T の部分超実解である．

（iii）　S の超実解はすべて T の超実解である．

証明　記号を簡単にするために，S の変数は x だけ，T の変数は x, y の二つであるとする．

（i）⇒（iii）　S の各実解 x_0 に対し，(x_0, y_0) が T の実解になるような実数 y_0 を一つ決め，$y_0=f(x_0)$ とする．つぎの二つのことが成りたつ：

$$S \text{ の実解はすべて } f(x)=f(x) \text{ の解である．} \qquad (3)$$

$$S \cup \{y=f(x)\} \text{ の実解は } T \text{ の解である．} \qquad (4)$$

定理 4 により，(3), (4) は超実数に対しても成りたつ．さて，x_1 を S の超実解とする．(3) によって $f(x_1)$ は定義されているから，$y_1=f(x_1)$ と置く．(4) によって (x_1, y_1) は T の超実解である．すなわち x_1 は T の部分超実解である．

（iii）⇒（ii）　明らか．

（ii）⇒（i）　x_0 を S の実解とし，かりにそれが T の部分実解でなかったと仮定する．T の式に現われる変数 x をすべて定数 x_0 に置きかえて得られる式系を $T(x_0, y)$ とする．いまの仮定によって $T(x_0, y)$ は実解をもたない．定理 1 により，$T(x_0, y)$ は超実解をもたない．すなわち，x_0 は T の部分超実解でないことになり，(ii) に反する．したがって x_0 は T の部分実解である．　⊣

例 2　任意の正の超実数 x に対し，$y^n=x$ なる正の超実数 y が唯一つ存在する．

証明　変数 x をもつ式系 S として

$$x>0$$

を考え，変数 x, y をもつ式系 T として

$$x>0, \quad y>0, \quad y^n=x$$

を考える．S の実解はすべて T の部分実解である（これは $\boldsymbol{R}$ の完備性から出る）．部分解定理により，S の超実解はすべて T の部分超実解である．これで y の存在が証明された．$y_1 \neq y$ とすると，$y_1<y$ または $y<y_1$ である．$\boldsymbol{R}^*$ は順序体だから，$y_1^n<y^n$ または $y^n<y_1^n$

となり，$y_1^n \fallingdotseq x$.　⊣

もう一つの同値な公理系

公理Aの実数体の完備性は初学者には分りにくい．実はこれは標準部分定理と同値である．この定理は分りやすく，使いやすいので，こっちを公理とし，完備性は定理として証明する方が教育的には望ましいかもしれない．以下，標準部分定理を含む公理系を挙げ，それが本来の公理系A—Dと同値であることを示す．

公理 A′　$\boldsymbol{R}$はアルキメデス順序体である(アルキメデス順序体の定義は節1Fを見よ)．

公理 B　$\boldsymbol{R}^*$は$\boldsymbol{R}$の真拡大順序体である．

公理 S（標準部分の公理）　任意の有限超実数はちょうど一つの実数に無限に近い．

公理 C（関数の公理）　任意のn変数実関数fに対し，fの自然延長と呼ばれるn変数超実関数f^*が対応する．特に，$\boldsymbol{R}^*$の体演算は$\boldsymbol{R}$の体演算の自然延長である．

公理 D（解の公理）　二つの式系がちょうど同じ実解をもつならば，それはちょうど同じ超実解をもつ．

定理 6　新しい公理系 A′, B, S, C, D は本来の公理系 A, B, C, D に同値である．

証明　本来の公理系から新しい公理系が出ることはすでに示してある(完備性からアルキメデス性が出ることは節1F 定理4を見よ)．新しい公理系を仮定し，$\boldsymbol{R}$が完備であることを証明すればよい．Xを$\boldsymbol{R}$の空でない部分集合で上に有界なものとする．実数yがXの上界であるとき$f(y)=1$，そうでないとき$f(y)=0$として関数fを定める．Xは空でないから$f(a)=0$なるaが存在し，Xは有界だから$f(c)=1$なるcが存在する．$a<c$である．

tを任意の正実数とし，数列

$$a,\ a+t,\ a+2t,\ \cdots,\ a+nt,\ \cdots$$

を考える．アルキメデスの公理により，

$$\frac{c-a}{t}<n \quad \text{すなわち} \quad c<a+nt$$

なるnが存在する．したがって$f(a+n_0t)=1$であるような最小の正整数n_0が存在する：

$$f(a+n_0t-t)=0,\quad f(a+n_0t)=1,\quad a<a+n_0t<c+t.$$

したがって，不等式

$$0<t \tag{5}$$

の実解はすべて式系

$$f(u-t)=0,\quad f(u)=1,\quad a<u<c+t \tag{6}$$

の部分実解である．

そこで t_1 を正の無限小超実数とする．部分解定理により，t_1 は式系 (6) の部分超実解である．すなわち，ある超実数 u_1 を取ると，

$$f(u_1-t_1)=0,\quad f(u_1)=1,\quad a<u_1<c+t_1$$

が成りたつ．u_1 は有限超実数だから，$b=st(u_1)$ と置く．この b が X の最小上界であることを示そう．

式系

$$x<z,\qquad f(z)=0$$

の実解はすべて式 $f(x)=0$ の解だから，解の公理により，u_1-t_1 より小さいあらゆる超実数 x_1 に対して $f(x_1)=0$ である．特に x が b より小さい実数ならば，$x<u_1-t_1$ だから $f(x)=0$ となる．すなわち b より小さい上界はない．同様に，実数 y が b より大きければ $f(y)=1$ となる．もし b が上界でなければ，$b<z$, $z\in X$ なる z がある．$y=\dfrac{b+z}{2}$ とすると $b<y<z$ だから，$f(y)=1$ に反する．したがって b は X の上界である．　⊣

練習問題 1C

変数 x をもつ式系 S，変数 x,y をもつ式系 T をそれぞれつぎの 1)—5) のものとする．S の実解がすべて T の部分実解であるものはどれどれか．

1)　$S: x>0.\ T: x=y^2.$
2)　$S: x=x.\ T: x=y^2.$
3)　$S: x>0.\ T: y>0,\ x>y.$
4)　$S: x>0.\ T: \dfrac{1}{x}<y.$
5)　$S: x>0.\ T: y<x,\ x<y^2.$

1D　集合の自然拡大

我々の公理は関数の自然延長を定めているだけだが，これを使って実数の集合

の自然拡大を定義することができる(《延長》と《拡大》とを使い分けるのは，関数の場合と集合の場合のイメージに合わせただけである)．その後で実数の関係の自然延長を定義する．

定義　Y を $\boldsymbol{R}$ の部分集合，Y^* を $\boldsymbol{R}^*$ の部分集合とする．実解の全体が Y であるような任意の式系 S に対し，S の超実解の全体が Y^* であるとき，Y^* を Y の**自然拡大**と言う．

まず，$\boldsymbol{R}$ の任意の部分集合が唯一つの自然拡大をもつことを示す．一意性はすぐ分る．実際，解の公理により，二つの式系 S, T の実解の全体が同じ Y であれば，S, T の超実解の全体も同じだからである．

自然拡大の存在を示すためには，実解の全体が Y であるような式系が一つ存在すればよい．そのとき，この式系の超実解の全体が Y の唯一つの自然拡大となる．このような式系は簡単にできる．C_Y を Y の特性関数とする：

$$C_Y(x)=\begin{cases}1 & x\in Y \text{ のとき},\\ 0 & x\notin Y \text{ のとき}.\end{cases}$$

このとき，一つの式

$$C_Y(x)=1$$

が求める式系であることは明らかだろう．

技術的には，式 $C_Y(x)=1$ の超実解の全体を Y の自然拡大と定義する方がてっとり早い．

項 τ と $\boldsymbol{R}$ の部分集合 Y とに対し，式 $C_Y(\tau)=1$ のことを $\tau\in Y$，$C_Y(\tau)=0$ のことを $\tau\notin Y$ とも書く．すなわち，$\tau\in Y$ や $\tau\notin Y$ は我々の定義の意味で《式》であり，したがって式系のメンバーとしての資格がある．

例 1　$[a,b]=\{x\in\boldsymbol{R}\,;\ a\leqslant x,\ x\leqslant b\}$ だから，

$$[a,b]^*=\{x\in\boldsymbol{R}^*\,;\ a\leqslant x,\ x\leqslant b\}.$$

$(a,b)=\{x\in\boldsymbol{R}\,;\ a<x,\ x<b\}$ だから，

$$(a,b)^*=\{x\in\boldsymbol{R}^*\,;\ a<x,\ x<b\}.$$

定理 1　X, Y を $\boldsymbol{R}$ の部分集合とする．

(i)　$X^*\cap\boldsymbol{R}=X$.

(ii)　自然拡大写像はブール演算を保つ．すなわち，

$$(X\cap Y)^*=X^*\cap Y^*,$$

$$(X\cup Y)^*=X^*\cup Y^*,$$
$$(X-Y)=X^*-Y^*,$$
$$X\subseteq Y \Leftrightarrow X^*\subseteq Y^*.$$

（iii） 任意の一変数実関数 f に対し，

$$(f\text{ の定義域})^*=f^*\text{ の定義域},$$
$$(f\text{ の値域})^*=f^*\text{ の値域}.$$

証明 どれもやさしいが，（iii）だけやってみよう．

X を f の定義域とする．X は一つの等式

$$f(x)=f(x) \qquad (1)$$

の実解の全体である．したがって X^* は (1) の超実解の全体，すなわち f^* の定義域である．

つぎに Y を f の値域とする．Y の各点 y に対し，$f(x)=y$ なる実数 x を一つ決めて $x=g(y)$ とする．すると Y は等式

$$f(g(y))=y \qquad (2)$$

の実解の全体である．したがって Y^* は (2) の超実解の全体だから，Y^* は f^* の値域に含まれる．一方，等式 $f(x)=y$ のすべての実解，したがってすべての超実解は (2) の解である．したがって Y^* は f^* の値域を含む． ⊣

例 2 整数の全体 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ を $\boldsymbol{Z}$，負でない整数の全体 $\{0,1,2,\cdots\}$ を $\boldsymbol{N}$，正整数の全体 $\{1,2,\cdots\}$ を $\boldsymbol{N}^+$ と書く．$\boldsymbol{N}$ の元を自然数と言う．$\boldsymbol{Z}^*$ の元を超整数，$\boldsymbol{N}^*$ の元を超自然数と言う．普通の整数でない超整数はすべて（正または負の）無限大である．

証明 普通の整数でない超整数 N が有限だとする．N より小さい整数があるから，そのうち最大のものを n とすると，$n<N<n+1$ が成りたつ．x を変数とする式系

$$S:\ x\in\boldsymbol{Z},\ n<x,\ x<n+1$$

は実解をもたない．前節定理1の（ii）により，S は超実解をもたないはずであり，矛盾する． ⊣

例 3 $f(n)=n!$（n の階乗）の定義域は $\boldsymbol{N}$ だから，f の自然延長 f^* は $\boldsymbol{N}^*$ 上定義される．また，f の値域は $\boldsymbol{N}$ に含まれるから，f^* の値域は $\boldsymbol{N}^*$ に含まれる．超自然数 N に対しても，$f^*(N)$ を $N!$ と書くことにする．N が無限大超自然数ならば，$N!$ はあらゆる正整数で割りきれる．すなわち，任意の正整数 m に対し，$mx=N!$ となる超整数 x が存在する．

証明 変数 m,n をもつ式系

$$S:\ m\in\boldsymbol{N}^+,\ n\in\boldsymbol{N}^+,\ m\leqslant n$$

および変数 m,n,x をもつ式系

$$T:\ m\in \boldsymbol{N}^+,\ n\in \boldsymbol{N}^+,\ x\in \boldsymbol{N}^+,\ m\leqslant n,\ mx=n!$$

を考える．Sの実解はすべてTの部分実解である．したがってSの超実解はすべてTの部分超実解である．特に．Nが無限大超自然数，mが正整数なら，(m,N)はSの超実解だから，$mx=N!$となる超自然数xが存在する．　⊣

つぎに実数の集合の位相的性質と超実数との関係を説明する．実数xの**実近傍**とは

$$(x-r, x+r)$$

の形の開区間のことである．ただし，rは正の実数である．これを特定するときにはr**近傍**と言う．$\boldsymbol{R}$の部分集合Yの点xのある実近傍がYに含まれるとき，xをYの**内点**と言う．内点の全体をYの**内部**と言う．集合Yがその内部と一致するとき，Yを**開集合**と言う．実数の集合Yに対し，実数xでその任意の実近傍がYと交わるようなものの全体をYの**閉包**と言う．集合Yがその閉包と一致するとき，Yを**閉集合**と言う．

定理 2　cを実数，Yを$\boldsymbol{R}$の部分集合とする．Yがcのある近傍を含む(すなわちcがYの内点である)ためには，Y^*がcの単子を含むことが必要十分である．

証明　1°　Yがcのr近傍$(c-r, c+r)$を含むとする．不等式

$$|c-x|<r$$

の実解はすべてYに属する(すなわち$C_Y(x)=1$の解)．したがってこの不等式の超実解はすべてY^*に属する．

2°　Yがcのいかなる実近傍も含まないとする．すると，不等式

$$x>0 \tag{3}$$

の実解はすべて式系

$$y\notin Y,\qquad |c-y|<x \tag{4}$$

の部分実解である．そこでx_1を正の無限小とする．x_1は(3)の超実解だから(4)の部分超実解である．すなわち，ある超実数y_1を取ると，

$$y_1\notin Y^*,\qquad |c-y_1|<x_1$$

が成りたつ．y_1はcの単子に属し，Y^*に属さない．　⊣

系 3　$\boldsymbol{R}$の部分集合Yの閉包は，Y^*に属する有限超実数の標準部分の全体

$$\{st(x)\,;\ x\text{は有限かつ}\ x\in Y^*\}$$

に等しい．特に，Yが閉集合であるためには，Y^*に属する任意の有限超実数の

標準部分がYに属することが必要十分である.

証明 $Z=\boldsymbol{R}-Y$ と置くと $Z^*=\boldsymbol{R}^*-Y^*$. つぎの五つの条件は互いに同値であることが順に確かめることによってすぐ分る：

c はYの閉包に属する.

c は Z の内部に属さない.

c の単子は Z^* に含まれない.

Y^* のある点xに対して $x\approx c$.

Y^* のある有限な点xに対して $c=st(x)$. ⊣

系 4 実関数fが実数cのある実近傍の各点で定義されているためには, f^* がcの単子の各点で定義されていることが必要十分である.

証明 定理1の（iii）および定理2による. ⊣

$\boldsymbol{R}$ の部分集合 Y がある閉区間 $[a, b]$ に含まれるとき, Y は**有界**であると言う.

定理 5 $\boldsymbol{R}$ の部分集合 Y が有界 $\Longleftrightarrow$ Y^* の元がすべて有限.

証明 1° Y が有界, $Y\subseteq[a, b]$ とする. Y の任意の元, すなわち式 $y\in Y$ の任意の実解は式系

$$a\leqslant y, \qquad y\leqslant b \tag{5}$$

の解だから, Y^* の任意の元は (5) の超実解であり, したがって有限である.

2° Yが有界でないとき, たとえばYが上界をもたないとする. 任意の実数xは式系

$$x<y, \qquad y\in Y \tag{6}$$

の部分実解である. x_1 を正の無限大超実数とする. x_1 は (6) の部分超実解だから, ある超実数 y_1 を取ると, $x_1<y_1$, $y_1\in Y^*$ となる. y_1 は Y^* の元であり, 有限でない. ⊣

定義 $\boldsymbol{R}$ の部分集合 Y が有界でかつ閉集合であるとき, Y を**コンパクト集合**と言う.

系 6 $\boldsymbol{R}$ の部分集合Yがコンパクトであるためには, Y^* の任意の元が有限で, その標準部分がYに属することが必要十分である.

証明 系3および定理5による.

最後に実数の関係を論じる. $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合のことをn変数の**実関係**と言う.

定義　Yをn変数の実関係，Y^*を$\boldsymbol{R}^{*n}$の部分集合とする．解の全体がYであるような任意の式系Sに対してSの超実解の全体がY^*であるとき，Y^*をYの**自然拡大**または**自然延長**と言う．任意のYは唯一つの自然拡大をもつ．

$\boldsymbol{R}^n$ないし$\boldsymbol{R}^{*n}$の二点

$$x=(x_1, \cdots, x_n), \qquad y=(y_1, \cdots, y_n)$$

に対し，

$$|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

をxとyとの**距離**と言う．

$\boldsymbol{R}^n$の点xおよび正実数rに対し，集合

$$N_r(x)=\{y\in\boldsymbol{R}^n\,;\ |x-y|<r\}$$

をxのr**近傍**と言う．一般にこの形の集合をxの**実近傍**と言う．

$x, y\in\boldsymbol{R}^{*n}$，$|x-y|\approx 0$のとき，$x$は$y$に**無限に近い**，または$x$と$y$とは互いに無限に近いと言い，$x\approx y$と書く．

$\boldsymbol{R}^n$の点xに無限に近い$\boldsymbol{R}^{*n}$の点の全体をxの単子と言い，monad(x)と書く：

$$\mathrm{monad}(x)=\{y\in\boldsymbol{R}^{*n}\,;\ x\approx y\}$$

$\boldsymbol{R}^{*n}$の点$x=(x_1, \cdots, x_n)$に対し，各x_iが有限超実数のとき，xは**有限**であると言う．

以上の定義のもとで，$\boldsymbol{R}$の部分集合に対して証明したこの節の結果は，すべて$\boldsymbol{R}^n$の部分集合に対しても成りたつ(自分で定理を正しく述べ，それを証明せよ)．

練 習 問 題 1D

1. $\boldsymbol{R}$の部分集合Yが閉集合であるのは，補集合$\boldsymbol{R}-Y$が開集合のときである．これを証明せよ．$\boldsymbol{R}^n$の部分集合についてはどうか．
2. 実関数fが十分大きいすべての実数で定義されている，すなわちある区間$[a,\infty)$で定義されているためには，fの自然延長f^*があらゆる正の無限大超実数で定義されていることが必要十分である．これを示せ．
3. 超有理数，超無理数を定義せよ．

1E　超実数体の簡単な構成

いよいよ超実数体を構成し，公理系 A—D をみたす三つ組 $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}^*, *)$ が存在

することを示す．したがって，我々の公理を使って証明される実数についての主張はすべて正しいことが分る．超実数は実数の研究を簡単にするための手段になる†)．

これからやる構成は数学基礎論で言うコンパクト性定理の証明の特別な場合である．それは，与えられた体と与えられた多項式に対してその零点を含む拡大体が存在することの証明に似ている．

さて，我々の構成は選択公理の一つの形であるツォルンの補題を使う．

X を空でない集合で，その元がすべて集合であるものとする．X の任意の元 x, y に対して $x\subseteq y$ または $y\subseteq x$ が成りたつとき，X を**くさり**と言う．

ツォルンの補題　Y を集合から成る空でない集合とし，Y に含まれる任意のくさり X に対し，X の元全部の合併が Y に属するとする．このとき Y は極大元 y をもつ．すなわち，y を真に含むような Y の元が存在しないような元 y をもつ．

存在定理　公理 A—D をみたす三つ組 $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}^*, *)$ が存在する．

証明　方針はつぎのとおり：x が正の無限小であることを記述するのに必要なあらゆる式を含むような（式の）無限集合 M を一つ作り，それをもとにして $\boldsymbol{R}^*$ を作る．

1°　M を一つの変数 x を含む式（方程式および不等式）から成る集合とする．M の任意の有限部分集合が実解をもつとき，M は**無矛盾**であると言う．式の無矛盾な集合から成るくさり X があると，その元全部の合併も無矛盾である．実際 X の有限部分集合は X のある元に含まれてしまう．そこで，まず不等式の集合

$$M_0=\left\{0<x,\ x<\frac{1}{2},\ x<\frac{1}{3},\ x<\frac{1}{4},\ \cdots\right\}$$

を考える．M_0 は無矛盾である．M_0 を含む無矛盾な集合の全体 Y にツォルンの補題を適用すると，Y は極大元 M をもつ．すなわち，

$$\left\{0<x,\ x<\frac{1}{2},\ x<\frac{1}{3},\ x<\frac{1}{4},\ \cdots\right\}\subseteq M, \tag{1}$$

$$M \text{ は極大な無矛盾集合である．} \tag{2}$$

2°　一つの変数 x を含む項 $\tau(x)$ で，式 $\tau(x)=\tau(x)$ が M に属するようなものの全体を $T(M)$ とする．$T(M)$ の元 $\sigma(x), \tau(x)$ に対し，式 $\sigma(x)=\tau(x)$ が

†)（訳注）しかし，この構成はやさしいとは言えない．この種の論法に慣れていない人たちには抵抗が大きいだろう．新入生は必ずしもこの部分を理解する必要がないと思う．

M に属するとき，$\sigma(x)$ と $\tau(x)$ とは M **を法として合同**であると言う．この合同関係は $T(M)$ 上の同値関係である．実際，反射律と対称律とは自明だから，推移律を調べよう．$\sigma(x)=\tau(x)$，$\tau(x)=\rho(x)$ がともに M に属するとすると，$M\cup\{\sigma(x)=\rho(x)\}$ は無矛盾であり，M の極大無矛盾性(2)によって $\sigma(x)=\rho(x)$ は M に属さなければならない．

変数 x 自身も一つの項である．項 x はすべての実数で定義されているから，M の極大無矛盾性によって式 $x=x$ は M に属する．すなわち x は $T(M)$ に属する．M を法として x に合同な項の全体を ε とする．また，$T(M)$ の元 $\tau(x)$ に M を法として合同な項の全体，すなわち $\tau(x)$ の属する合同類を $\tau[\varepsilon]$ と書く．すると，

$$\sigma[\varepsilon]=\tau[\varepsilon] \Longleftrightarrow [\sigma(x)=\tau(x)]\in M.$$

3°　三つ組 $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}^*, *)$ を定義する．いま作った M を法とする合同類の全体を $\boldsymbol{R}^*$ とする：

$$\boldsymbol{R}^*=\{\tau[\varepsilon]\ ;\ \tau(x)\in T(M)\}.$$

すなわち，超実数（$\boldsymbol{R}^*$ の元）は M を法とする項の合同類である．実数 r も一つの項であり，当然 $T(M)$ に属するから，その属する合同類は超実数である．r と s が相異なる実数なら，$r=s$ は M に属さないから，その合同類は異なる．だから，実数 r をその合同類と同一視して，$\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{R}^*$ の部分集合とみなす：$\boldsymbol{R}^*$ の元 $\sigma[\varepsilon]$ に対し，

$$\sigma[\varepsilon]=r \Longleftrightarrow [\sigma(x)=r]\in M.$$

$\boldsymbol{R}^*$ 上の順序関係 $\leqslant^*$ をつぎのように定義する：

$$\sigma[\varepsilon] \leqslant^* \tau[\varepsilon] \Longleftrightarrow [\sigma(x)\leqslant\tau(x)]\in M.$$

これが代表項の取りかたによらずに定義されることは M の極大無矛盾性から簡単に分る．この関係が順序関係であること，およびそれが $\boldsymbol{R}$ の順序関係の延長になっていることもすぐ分る．

一変数実関数 f の自然延長 f^* をつぎのように定義する：

$$\begin{cases} f^*(\tau[\varepsilon])=f(\tau(x))[\varepsilon], & f(\tau(x))\in T(M) \text{ のとき}, \\ f^*(\tau[\varepsilon]) \text{ は定義されない}, & f(\tau(x))\notin T(M) \text{ のとき}. \end{cases}$$

$f^*(\tau[\varepsilon])$ が類 $\tau[\varepsilon]$ の代表 $\tau(x)$ の取りかたによらずに決まることは M の極大無矛盾性によって分る．まったく同様に n 変数実関数の自然延長も定義される．特に $\boldsymbol{R}$ の加法，乗法（二変数実関数）の自然延長を $+^*$，$\cdot^*$ と書く．

以上で三つ組 $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}^*, *)$ が構成された.

4°　四つの公理のうち，公理A（$\boldsymbol{R}$ が完備順序体であること）は構成とは無関係に正しい．公理C（関数の公理）の前半，すなわち実関数 f にその自然延長 f^* が対応する，という部分もよい.

まず公理Cの後半と公理Bとが成りたつことを示す．すなわち，演算 $+^*$, $\cdot^*$ および関係 $\leqq^*$ によって $\boldsymbol{R}^*$ が順序体であり，$\boldsymbol{R}$ がその真部分順序体であることを示す．条件 (1) により，$\varepsilon>0$ であり，また任意の正整数 n に対して $\varepsilon<\dfrac{1}{n}$ が成りたつから ε は正の無限小であり，したがって $\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{R}^*$ の真部分集合である. $\boldsymbol{R}^*$ が順序体であることの証明は長いだけでごくやさしい．たとえば加法の交換法則はつぎのようにして示される．$\sigma[\varepsilon]$, $\tau[\varepsilon]$ を $\boldsymbol{R}^*$ の元とする．方程式

$$\sigma(x)+\tau(x)=\tau(x)+\sigma(x)$$

を M に付加えても無矛盾な集合が得られるから，M の極大性によってこの方程式は M に属する．したがって $\sigma+\tau$（正しくは $\sigma(x)+\tau(x)$）と $\tau+\sigma$ とは M を法として合同であり，

$$\sigma[\varepsilon]+^*\tau[\varepsilon]=(\sigma+\tau)[\varepsilon]=(\tau+\sigma)[\varepsilon]=\tau[\varepsilon]+^*\sigma[\varepsilon]$$

となる.

5°　最後に公理D（解の公理）を証明する．記号を簡単にするために，変数を一つだけ含む二つの式系

$$\Phi(u)=\{\phi_1(u), \cdots, \phi_m(u)\},$$
$$\Psi(u)=\{\psi_1(u), \cdots, \psi_n(u)\}$$

が同じ実解をもつとする．$\phi_i(u)$, $\psi_j(u)$ は変数 u を含む方程式または不等式である.

$\sigma(u)$ を u を含む項，$\tau[\varepsilon]$ を超実数で $\sigma(\tau[\varepsilon])$ が定義されているものとする．実関数の自然延長の定義をくりかえして使うことにより，

$$\sigma(\tau[\varepsilon])=\sigma(\tau(x))[\varepsilon] \tag{3}$$

が成りたつことが分る．$\sigma(\tau[\varepsilon])$ が定義されるのは，$\sigma(\tau(x))[\varepsilon]$ が定義される場合である．したがって．任意の式 $\phi(u)$ および任意の超実数 $\tau[\varepsilon]$ に対し，

$$\phi(\tau[\varepsilon]) \text{ が真 } \Longleftrightarrow \phi(\tau(x))\in M \tag{4}$$

が成りたつ.

さて，$\tau[\varepsilon]$ を式系 $\Phi(u)$ の超実解とする．(4) により，

$$\Phi(\tau(x))=\{\phi_1(\tau(x)), \cdots, \phi_m(\tau(x))\}\subseteq M.$$

二つの式系 $\Phi(u)$, $\Psi(u)$ は同じ実解 u をもつから, 二つの式系 $\Phi(\tau(x))$, $\Psi(\tau(x))$ は同じ実解 x をもつ. M は無矛盾だから, M の任意の有限部分集合 M_1 に対し, 式系 $M_1 \cup \Phi(\tau(x))$ は実解をもつ. したがって式系 $M_1 \cup \Psi(\tau(x))$ も実解をもつ. M_1 は任意だから $M \cup \Psi(\tau(x))$ は無矛盾である. M の極大無矛盾性によって

$$\Psi(\tau(x)) \subseteq M$$

でなければならない. (4) によって, $\psi_1(\tau[\varepsilon]), \cdots, \psi_n(\tau[\varepsilon])$ はすべて真, すなわち $\tau[\varepsilon]$ は式系 $\Psi(u)$ の超実解である. ⊣

1F　付録　実数体の代数

現代代数の基本的な概念を簡単に説明し, それを使って実数体を特徴づける (定理 3). 証明は省略する.

環　構造 $(R, 0, +, -, \cdot)$ がつぎの公理をみたすとき, これを (**可換**) **環**と言う:

演算閉性: $0 \in R$, $a+b \in R$, $-a \in R$, $a \cdot b \in R$.

交換法則: $a+b=b+a$, $a \cdot b = b \cdot a$.

結合法則: $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$.

恒等法則: $a+0=a$.

逆元法則: $a+(-a)=0$.

分配法則: $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$.

部分環　環 R の部分集合で, 演算閉性をみたすものを R の**部分環**と言う.

イデアル　I を環 R の部分環とする. $a \in I$, $r \in R \Rightarrow a \cdot r \in I$ が成りたつとき, I を R の**イデアル**と言う.

剰余類　S を環 R の部分環とし, r を R の元とする.

$$\mathrm{coset}(r)=\{r+s\ ;\ s \in S\}$$

を S を法とする r の**剰余類**と言う.

同値関係　集合 A 上の二項関係 $\equiv$ がつぎの三条件をみたすとき, $\equiv$ を A 上の**同値関係**と言う: A の元 a, b, c に対し,

$$a \equiv a,$$
$$a \equiv b \Rightarrow b \equiv a,$$
$$a \equiv b,\ b \equiv c \Rightarrow a \equiv c.$$

定理 1　S が R の部分環なら，関係 $a-b \in S$ は R 上の同値関係であり，

$$a-b \in S \text{ なら } \mathrm{coset}(a) = \mathrm{coset}(b),$$
$$a-b \notin S \text{ なら } \mathrm{coset}(a) \cap \mathrm{coset}(b) = \varnothing.$$

準同型　環 R から環 S への関数 h が，$a, b \in R$ に対して

$$h(a+b) = h(a) + h(b),\quad h(-a) = -h(a),\quad h(a \cdot b) = h(a) \cdot h(b)$$

をみたすとき，h を R から S への**準同型写像**と言う．

同型　準同型写像 h が R から S の上への一対一写像であるとき，h を R から S への**同型写像**と言う．

体　体とは，構造 $(F, 0, 1, +, -, \cdot, {}^{-1})$ であって，$(F, 0, +, -, \cdot)$ が可換環であり，しかも F の 0 でない任意の元 a に対してつぎの条件がみたされるものである：

演算閉性：$1 \in F$，$a^{-1} \in F$.

非自明性：$1 \neq 0$.

恒等法則：$1 \cdot a = a$.

逆元法則：$a \cdot (a^{-1}) = 1$.

部分体　体 F の部分集合 G が演算閉性をみたすとき，G を F の**部分体**と言う．G はそれ自身，体である．

真拡大体　G が体 F の部分体で $G \neq F$ のとき，F を G の**真拡大体**と言う．

順序体　体 $(F, 0, 1, +, -, \cdot, {}^{-1})$ および F 上の二項関係 $<$ がつぎの公理をみたすとき，F を**順序体**と言う：$a, b, c \in F$ に対し，

推移律：$a<b$，$b<c$ なら $a<c$.

三分律：$a<b$，$a=b$，$b<a$ のどれか一つだけが成りたつ.

和の法則：$a<b$ なら $a+c<b+c$.

積の法則：$a<b$，$0<c$ なら $a \cdot c < b \cdot c$.

例　$\boldsymbol{Z}$：整数環すなわち整数全部の環.

$\boldsymbol{Q}$： 有理数体すなわち有理数全部の順序体.

$\boldsymbol{R}$： 実数体すなわち実数全部の順序体.

$\boldsymbol{C}$： 複素数体すなわち複素数全部の体.

GF(2)： 集合 $\{0,1\}$ に $1+1=0$ とした体.

$\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{Q}$ の部分環，$\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{R}$ の部分体，$\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{C}$ の部分体である. 偶数の全体は $\boldsymbol{Z}$ のイデアルである. $\boldsymbol{Z}$ から GF(2) への写像 h を，n が偶数のとき $h(n)=0$, n が奇数のとき $h(n)=1$ として定義すると，h は環 $\boldsymbol{Z}$ から環 GF(2) への準同型写像である.

定理 2　順序体においてつぎの諸法則が成りたつ.

$$a(-b)=(-a)b=-(ab).\quad a\cdot 0=0,\quad 0<1.$$

$$-(-a)=a,\quad (a^{-1})^{-1}=a\quad (a\neq 0).$$

$$-(a-b)=b-a,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}\quad (a,b\neq 0).$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\quad (b,d\neq 0).$$

$a<b$ なら $-b<-a$. $0<a<b$ なら $0<b^{-1}<a^{-1}$.

$$|-a|=|a|,\ |ab|=|a|\,|b|,\ \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\quad (b\neq 0),$$

ただし，$a\geqq 0$ なら $|a|=a$, $a<0$ なら $|a|=-a$.

《$a<b$ または $a=b$》のことを $a\leqq b$ と書く.

$$n=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\ 回}\in F.$$

アルキメデス順序体　F を順序体とする. F の任意の元 a に対し，a より大きい正整数 $n=\underbrace{1+\cdots+1}_{n\ 回}$ が存在するとき，F を**アルキメデス順序体**と言う.

完備順序体　F を順序体とする. 上に有界な F の任意の空でない部分集合が F の中に最小上界（これを**上限**と言う）をもつとき，F を完備順序体と言う.

順序同型　順序体 F から順序体 G への同型写像 h が，$a,b\in F$ に対して《$a<b \Longleftrightarrow h(a)<h(b)$》をみたすとき，$h$ を F から G への**順序同型写像**と言う.

定理 3　完備順序体が順序同型を除いて唯一つ存在する. すなわち，少くとも一つの完備順序体が存在し，任意の二つの完備順序体の間には順序同型写像が存在する. 完備順序体を**実数体**と言う.

定理 4　完備順序体はアルキメデス順序体である. さらに，順序体 G がアル

キメデス的であるためには，Gが実数体の部分体に順序同型であることが必要十分である．

区間 Iを実数体$\boldsymbol{R}$の部分集合とする．$a, b\in I$, $a<c<b$ なら $c\in I$ となるとき，Iを（実）**区間**と言う．

$\boldsymbol{R}$の完備性により，区間はつぎの五つの型に分類される：

有界閉区間 $[a, b]=\{x\,;\,a\leqslant x\leqslant b\}$.

有界開区間 $(a, b)=\{x\,;\,a<x<b\}$.

有界半開区間 $[a, b)$, $(a, b]$.

非有界開区間 $(a, \infty)=\{x\,;\,a<x\}$, $(-\infty, b)=\{x\,;\,x<b\}$, $\{-\infty, \infty\}=\boldsymbol{R}$.

非有界半開区間 $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$.

2 微 分 法

本書を通じ，関数 $f, g, \cdots$ は超実関数ではなく，実関数を表わすものとする．超実数は，実関数の極限，導関数，連続性，積分などを定義するための道具として使う．

節2Bでは，K. ストロイアンに示唆された方法によって，無限小顕微鏡および無限遠望遠鏡を厳密に扱う．

2A 導 関 数

定義　実数 S が実関数 f の a での**勾配**であるとは，任意の0でない無限小 Δx に対して

$$S=st\left(\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right)$$

が成りたつことである．

f の a での勾配が存在するとき，f は a で**微分可能**だと言う．

実関数 f の**導関数** f' とはつぎのような関数である：

f の x での勾配が存在すれば $f'(x)$ はその勾配に等しい．

f の x での勾配が存在しなければ $f'(x)$ は定義されない．

第5章でこの定義が標準的な導関数の定義と同値なことを示す．

注意　定義からただちにつぎのことが分る．実関数 f が a で微分可能であるためには，つぎの二条件がみたされることが必要十分である：

（1）$x\approx a$ なるすべての超実数 x で $f(x)$ は定義されている．

（2）0でないあらゆる無限小 Δx に対し，商

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

は有限で，共通の標準部分をもつ．

だから，節1Dの系4により，f が a で微分可能なら，a のある実近傍に属するあらゆる実数 x に対して $f(x)$ が定義されていなければならない．

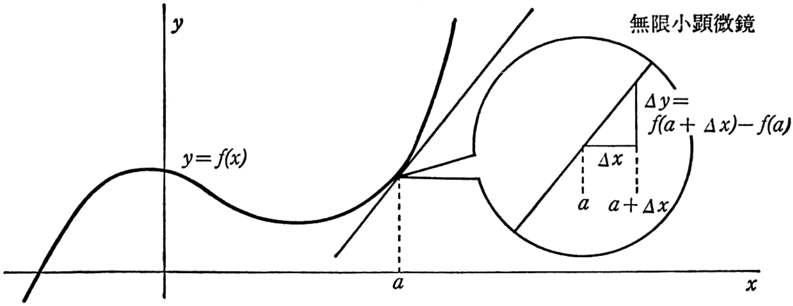


図 2

例 1　$f(x)=x^3$ の導関数．x を実数，Δx を 0 でない無限小超実数とし，$f(x+\Delta x)-f(x)$ を Δy と書く（例 2 以下も同様）．

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

$$st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=st(3x^2)+st(3x\Delta x)+st((\Delta x)^2)=3x^2+0+0=3x^2.$$

したがって $f'(x)=3x^2$.

例 2　$f(x)=|x|$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|x+\Delta x|-|x|}{\Delta x}.$$

a)　$x>0$ なら $x+\Delta x>0$ であり，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$．よって $f'(x)=1$.

b)　$x<0$ なら $x+\Delta x<0$ であり，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$．$f'(x)=-1$.

c)　$x=0$．$\Delta x>0$ なら $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$．$\Delta x<0$ なら $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$.

したがって $f'(0)$ は存在しない．

例 3　$f(x)=\sqrt{x}$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$.

a)　$x<0$ なら $\sqrt{x}$ は存在しないから，$f'(x)$ は存在しない．

b)　$x>0$ なら $x+\Delta x>0$ であり，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

$$st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\frac{1}{st(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{st(\sqrt{x+\Delta x})+st(\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{st(x+\Delta x)}+\sqrt{st(x)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\text{．よって } f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

c)　$x=0$．$\Delta x<0$ なら $\sqrt{\Delta x}$ は存在しない．したがって $f'(0)$ は存在しない．

ライプニッツの用語，記号をフルに活用するために，我々は独立変数および従属変数という言葉を使うことにする．まずこれらの概念をはっきり定義する．ある式系が与えられ，その解集合が一つの等式 $y=f(x)$ の解集合と一致するとき，y は x の**関数**である，y は x に**依存する**等と言い，x を**独立変数**，y を**従属変数**と言う．

y が x の関数のとき，新しく一つの独立変数 Δx および二つの従属変数 $\Delta y, dy$ を導入する．Δy は x および Δx に依存する従属変数で，等式

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

で定義される．これを y の**増分**と言う．Δx が 0 でない無限小であり，勾配 $f'(x)$ が存在するときには，

$$f'(x)=st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

が成りたつ．

つぎに，dy も x および Δx に依存する従属変数で，等式

$$dy=f'(x)\Delta x$$

で定義される．これを y の**微分**と言う．もちろん，$f'(x)$ が存在しなければ dy は定義されない．習慣に従って

$$dx=\Delta x$$

と書くと，よく知られた等式

$$dy=f'(x)dx, \qquad f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

が得られる．

幾何学的にはつぎのように言える．曲線 $y=f(x)$ 上の点 (a, b) を通り，勾配が $f'(a)$ である直線を，曲線 $y=f(x)$ の (a, b) での**接線**と言う．すると，

Δy は曲線に沿っての y の変化であり，

dy は接線に沿っての y の変化である．

以上の諸定義や考察が特に興味深いのは，普通 Δx が無限小のときである．増分 Δy や微分 dy が x と Δx との両方に依存することを忘れてはいけない．つぎの定理は Δx が無限小のときの dy と Δy との関係を示す．まず定義から．

定義　Δx を 0 でない無限小とする．二つの超実数 u, v に対し，

$$\frac{u}{\Delta x}\approx\frac{v}{\Delta x}$$

が成りたつとき，u と v とは $\varDelta x$ **に比べて互いに無限に近い**と言い，

$$u \approx v \quad (\varDelta x \text{ に比べて})$$

と書く．

《$\varDelta x$ に比べて無限に近い》という関係は明らかに同値関係である．この概念は昔からあるランダウの記号 O および o と密接な関係がある．ここで我々の立場から O および o を新たに定義して説明するが，この本では以後使わない．

0 でない無限小 $\varDelta x$ に対し，

$$O(\varDelta x) = \left\{ u \in \boldsymbol{R}^* \,;\, \frac{u}{\varDelta x} \text{ が有限} \right\},$$

$$o(\varDelta x) = \left\{ u \in \boldsymbol{R}^* \,;\, \frac{u}{\varDelta x} \text{ が無限小} \right\}$$

と置く．$O(\varDelta x)$ も $o(\varDelta x)$ も galaxy(0) のイデアルであり，

$$o(\varDelta x) \subseteq O(\varDelta x) \subseteq \text{monad}(0)$$

となっている．定義からすぐに

$$u \approx v \ (\varDelta x \text{ に比べて}) \Longleftrightarrow u - v \in o(\varDelta x)$$

が成りたつことが分る．

増分定理　$y = f(x)$ で $f'(x)$ が存在するとし，$\varDelta x$ を 0 でない無限小とする．このとき，

$$\varDelta y = f'(x)\varDelta x + \varepsilon \varDelta x = dy + \varepsilon \varDelta x$$

が成りたつ．ただし，ε はある無限小超実数である．言いかえると，

$$\varDelta y \approx dy \quad (\varDelta x \text{ に比べて})$$

が成りたつ．

逆に，実数 S が存在し，どんな 0 でない無限小超実数 $\varDelta x$ に対しても

$$\varDelta y = S\varDelta x + \varepsilon \varDelta x \qquad (\varepsilon \text{ は無限小})$$

が成りたつなら，言いかえれば

$$\varDelta y \approx S\varDelta x \qquad (\varDelta x \text{ に比べて})$$

が成りたつなら，f は x で微分可能で，$S = f'(x)$ である．

証明　1°　$\varepsilon = \dfrac{\varDelta y}{\varDelta x} - f'(x)$ と置くと ε は無限小である．$\varDelta x$ を掛けると，

$$\varepsilon \varDelta x = \varDelta y - f'(x)\varDelta x,$$
$$\varDelta y = f'(x)\varDelta x + \varepsilon \varDelta x.$$

2°　$\Delta x \neq 0$ として両辺を Δx で割れば，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=S+\varepsilon$，したがって

$$S=st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

が成りたつ．　⊣

例 4　$y=x^3$ の増分と微分．

$$\Delta y=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3=3x^2\Delta x+(3x\Delta x+(\Delta x)^2)\Delta x$$

$=3x^2\Delta x+\varepsilon\Delta x$．ただし，$\varepsilon=3x\Delta x+(\Delta x)^2$ は無限小である．

$dy=3x^2dx$，または $d(x^3)=3x^2dx$．

例 5　$y=|x|$，$x\neq 0$．

a）$x>0$．$\Delta y=x+\Delta x-x=\Delta x=1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta x$．$\varepsilon=0$．

$$d(|x|)=dx.$$

b）$x<0$．$\Delta y=-\Delta x=-1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta x$．$\varepsilon=0$．

$$d(|x|)=-dx.$$

例 6　$y=\sqrt{x}$，$x>0$．

$$\Delta y=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x+\left(\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\Delta x.$$

$$\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad \varepsilon\approx 0.$$

練 習 問 題 2 A

1.　つぎの関数の増分，微分，導関数を計算せよ．

（1）$y=\dfrac{1}{x}$　（2）$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　（3）$y=\sqrt[3]{x}$．

2.　実関数 f,g がともに実数 c で微分可能かつ $f(c)=g(c)$ であり，c に無限に近い任意の超実数 x に対して $f(x)\leqq g(x)$ が成りたつとする．このとき，$f'(c)=g'(c)$ が成りたつことを示せ．

3.　実関数 f が実数 c で微分可能であり，c のある実近傍 $(c-r,c+r)$ に属する任意の実数 x に対して $f(c)\leqq f(x)$ が成りたつとする．このとき，$f'(c)=0$ であることを示せ．

2 B　無限小顕微鏡と無限遠望遠鏡

超実平面の点 $P(a,b)$ および正の超実数 ε に対し，P からの距離が ε 以下であるような点，すなわち

$$(x-a)^2+(y-b)^2\leqq\varepsilon^2$$

となる点 (x,y) の全体を，Pを中心とする半径 ε の**円板**と言い，$D(P;\varepsilon)$ と書く．

定義 $P(a,b)$ を超実平面の点，δ を正の無限小とする．点 (u,v) を $(u-a, v-b)$ に移す平行移動と，点 (u,v) を $\left(\frac{u}{\delta},\frac{v}{\delta}\right)$ に移す $\frac{1}{\delta}$ 倍引伸し写像との合成写像 m を，焦点 P の δ **無限小顕微鏡**と言う：

$$m(u,v)=\left(\frac{u-a}{\delta},\frac{v-b}{\delta}\right).$$

写像 m によって円板 $D(P,2\delta)$ は，円板 $D(0,2)$ の上に一対一に移る．

$$x=\frac{u-a}{\delta},\qquad y=\frac{v-b}{\delta}$$

と書くと，(x,y) は $D(0,2)$ の点で，

$$m(a+\delta\cdot x, b+\delta\cdot y)=(x,y),\qquad x^2+y^2\leqq 4$$

が成りたつ．

Pを中心とする半径 2δ の円板 $D(P,2\delta)$ を，この顕微鏡の**視野**と言う．超実平面上の点 (x,y) が，(a,b) に無限に近いのは，それが焦点 (a,b) のある無限小顕微鏡の視野に入る場合である．また，視野の中の二点は，それらが δ に比べて無限に近くない場合，すなわちその距離が δ に比べて無限に小さくない場合に限り，焦点Pの δ 無限小顕微鏡で見ることによって識別できる．

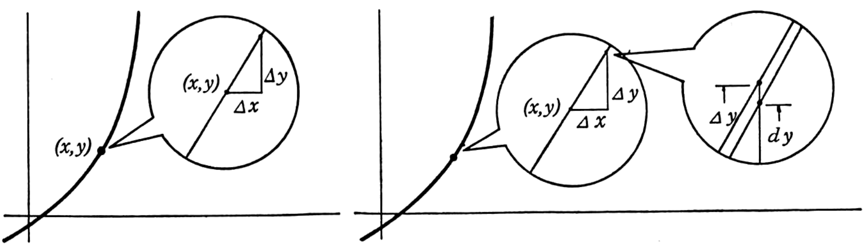


図 3

例として，関数の勾配を無限小顕微鏡で見てみよう．Sを実数とする．増分定理により，f が実数 a で微分可能で $S=f'(a)$ となるのは，任意の 0 でない無限小 $\varDelta x$ に対して

$$f(a+\varDelta x)\approx f(a)+S\varDelta x \qquad (\varDelta x \text{ に比べて})$$

が成りたつときである．幾何学的に言えば，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a+\varDelta x, f(a+\varDelta x))$ と，点$(a, f(a))$ を通る勾配 S の直線上の点 $(a+\varDelta x, f(a)+S\varDelta x)$ とが

Δx に比べて無限に近いときである．したがってそれはまた，焦点 $(a, f(a))$ の任意の無限小顕微鏡の視野の中で，曲線 $y=f(x)$ が勾配 S の直線のように見えるときである．図3の左図はこの状況を示す．

無限小顕微鏡は，曲線の勾配が存在する場合に，曲線と接線との違いを図示するためにも使うことができる．すなわち，図3の右図のように，Δx 無限小顕微鏡の中で，もっと強い $(\Delta x)^2$ 無限小顕微鏡を使うのである．すると，曲線と接線とは焦点 $(a, f(a))$ の Δx 無限小顕微鏡では識別することができないが，焦点 $(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$ の $(\Delta x)^2$ 無限小顕微鏡で見ればちゃんと識別することができる．

つぎに無限遠望遠鏡に移る．

定義　点 (a, b) を超実平面上の，原点から無限に遠い点，すなわち a^2+b^2 が無限大超実数であるような点とする．点 (u, v) を $(u-a, v-b)$ に移す平行移動 t を焦点 (a, b) の**無限遠望遠鏡**と言う：

$$t(u, v)=(u-a, v-b).$$

当然，t は円板 $D((a, b)\,;\,2)$ を円板 $D(0\,;\,2)$ に移すから，

$$t(a+x, b+y)=(x, y), \qquad x^2+y^2\leqq 4$$

と書ける．

2C　導関数の性質

導関数についてのよく知られた種々の規則は，第1章の標準部分に関する規則からごく簡単に得られる．

たとえば u, v が x の関数のとき，新らしく従属変数 $y=u+v$ を導入して dy と書くより，直接 $d(u+v)$ と書く方がずっと簡単である．だから，一般に独立変数 x を含む項 τ が与えられたとき，$y=\tau$ によって決まる従属変数 y に対し，dy のことを $d\tau$，$\dfrac{dy}{dx}$ のことを $\dfrac{d\tau}{dx}$ と書くことにする．

定理1　u, v を独立変数 x に依存する従属変数とする．x の実数値に対して $\dfrac{du}{dx}$，$\dfrac{dv}{dx}$ が存在するかぎり，つぎの諸法則が成りたつ：

(i)（和の法則）$\dfrac{d(u+v)}{dx}=\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dx}.$

（ii）（定数倍の法則）　任意の実数 c に対して $\dfrac{d(cu)}{dx}=c\dfrac{du}{dx}$.

（iii）（積の法則）　$\dfrac{d(uv)}{dx}=u\dfrac{dv}{dx}+v\dfrac{du}{dx}$.

（iv）（商の法則）　$v\neq 0$ なら $\dfrac{d\left(\dfrac{u}{v}\right)}{dx}=\dfrac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$.

証明　Δx を 0 でない無限小とする.

和の法則：$y=u+v$ と置くと,

$$\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(u+v)=\Delta u+\Delta v,$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$\therefore\quad st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+st\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right),$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}.$$

定数倍の法則：$y=cu$ とすると,

$$\Delta y=c(u+\Delta u)-cu=c\Delta u,$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=c\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

$$\therefore\quad st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=st\left(c\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=c\cdot st\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right),$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=c\frac{du}{dx}.$$

積の法則：$y=uv$ と置くと,

$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v,$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$\therefore\quad st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=st\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$=u\cdot st\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)+v\cdot st\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+0\cdot st\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right),$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

商の法則：$y=\dfrac{u}{v}$, $v\neq 0$ とすると,

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{(u+\Delta u)v-(v+\Delta v)u}{v(v+\Delta v)}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)},$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)},$$

$$\therefore\quad st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\frac{v\cdot st\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right)-u\cdot st\left(\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{v^2},$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

⊣

定理 2（巾（ベキ）の法則）　x が正の実数，r が有理数ならば，

$$\frac{d(x^r)}{dx}=rx^{r-1}.$$

証明　1°　r が正整数の場合．帰納法に積の法則を適用すればよい．

2°　$r=\dfrac{1}{n}$，n は正整数の場合．$y=x^{\frac{1}{n}}$ と置き，Δx を 0 でない無限小とする．

$$\Delta y=(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n}}$$

において，$x+\Delta x \neq x$ だから Δy は 0 でない．また，

$$[st((x+\Delta x)^{\frac{1}{n}})]^n=st[(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}]^n=st(x+\Delta x)=x$$

だから

$$st(\Delta y)=st((x+\Delta x)^{\frac{1}{n}})-st(x^{\frac{1}{n}})=x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n}}=0$$

であり，したがって Δy は無限小である．

さて，$x=y^n$ だから $\dfrac{dx}{dy}=ny^{n-1}$，$\dfrac{\Delta x}{\Delta y}\approx ny^{n-1}$ であり，したがって，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\approx\frac{1}{ny^{n-1}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1},$$

したがって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

となる．

3°　r が正の有理数の場合．$x^{\frac{m}{n}}=(x^{\frac{1}{n}})^m$ だから，1° と 2° から出る．

4°　r が負の有理数の場合．商の法則によって 3° から出る．

5°　r が 0 の場合．$x^0=1$ だから両辺とも 0 である．　⊣

$r=\dfrac{m}{n}$ で n が奇数なら，巾の法則は x の負の値に対しても成りたつ．n が偶数なら x^r は負の実数の範囲では定義されない．

2D 合成法則

合成法則は増分定理からごく自然に出てくる．

合成法則　f, G を実関数，g をその合成関数

$$g(t)=G(f(t))$$

とする．t の実数値に対して $f'(t)$ および $G'(f(t))$ が存在すれば $g'(t)$ も存在し，

$$g'(t)=G'(f(t))f'(t)$$

が成りたつ．

証明　$x=f(t)$，$y=g(t)=G(x)$ と置き，Δt を 0 でない無限小とする．$x=f(t)$ に対する増分定理により，Δx も無限小である．$y=G(x)$ に対する増分定理により，

$$\Delta y=G'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x$$

が成りたつ．ただし ε は無限小である．両辺を Δt で割って標準部分を取ると，

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=G'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t}+\varepsilon\frac{\Delta x}{\Delta t},$$

$$\frac{dy}{dt}=G'(x)\frac{dx}{dt}+0,$$

$$\therefore\quad g'(t)=G'(f(t))f'(t)$$

となる．　⊣

従属変数入りの合成法則はつぎのようになる：$x=f(t)$，$y=g(t)=G(x)$ とし，$g'(t)$ および $G'(x)$ が存在するとすると，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

が成りたつ．ただし，$\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ では t を独立変数と考え，$\dfrac{dy}{dx}$ では x を独立変数と考えて計算する．

標準的なやりかたの時と同様，合成法則は自明ではない．なぜなら，x を独立変数とするか t を独立変数とするかによって dy の意味が違うからである．実

際，xが独立変数なら

$$dy=G'(x)dx$$

であり，tが独立変数なら

$$dy=g'(t)dt$$

である．

高階導関数も普通どおりに定義される．すなわち，

f'' は f' の導関数，

$f^{(n+1)}$ は $f^{(n)}$ の導関数

として，あらゆる自然数nに対して $f^{(n)}$ が定義される．

yのn**階微分** d^ny は，

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$$

によって定義する．ただし，dx^n は $(dx)^n$ のことである．dx が無限小ならば，dx^2 はもっと小さい無限小であり，d^2y は実数 $f''(x)$ と dx^2 との積である．

練習問題 2D

1. つぎの関数の導関数および二階導関数を求めよ．

（1） $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　（2） $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$　（3） $\sqrt{2+\sqrt{x}}$　（4） $(2x^{\frac{1}{3}}+1)^3$

（5） $(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1})^{\frac{1}{3}}$

2. u,v がxの関数のとき，つぎの諸法則を証明せよ．

（1） $(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$ （cは実数）　（2） $(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$

（3） $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k u^{(k)}v^{(n-k)}$ （ライプニッツの法則，${}_nC_k$ は二項係数）．

3. つぎの関数のn階導関数を求めよ．

（1） $\dfrac{ax+b}{cx+d}$　（2） $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)}$

2E 超 越 関 数[†)]

三角関数，指数関数およびこれらの逆関数である逆三角関数，対数関数の厳密な定義は第7章と第8章で扱う．しかし，それまでこれらの関数が扱えないのは不便だから，ここで無限小解析の立場からこれらを直観的に見なおしておく．

---

†）（訳注） この節は原著にはない．内容は大体《初等微積分》から借りた．

1　三角関数　我々は角度を単位円の弧長で測っている（弧長の厳密な定義は第6章）．$\varDelta\theta$ が無限小でない実数の場合，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の増分 $\varDelta(\sin\theta)$，$\varDelta(\cos\theta)$ は図4のように図示される．ここでは $\dfrac{\varDelta(\sin\theta)}{\varDelta\theta}$ と $\cos\theta$ とは明らかに異なる．

$\varDelta\theta$ が0でない無限小の場合，そのままでは図にかけないので，点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ を焦点とする $\varDelta\theta$－無限小顕微鏡を使うと，図5のような図になる．この視野の中では円弧は直線に見え，弦と区別されない．二本の半径は平行に見える．したがって，

$$\frac{\varDelta(\sin\theta)}{\varDelta\theta}\approx\cos\theta, \qquad \frac{\varDelta(\cos\theta)}{\varDelta\theta}\approx-\sin\theta$$

が成りたつ．すなわち，

$$\frac{d(\sin\theta)}{d\theta}=\cos\theta, \qquad \frac{d(\cos\theta)}{d\theta}=-\sin\theta$$

となる．特に $\theta=0$ として，

$$\frac{\sin\varDelta x}{\varDelta x}\approx\cos 0=1$$

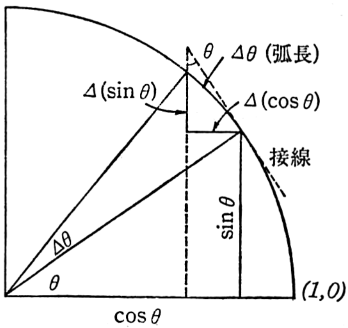


図 4

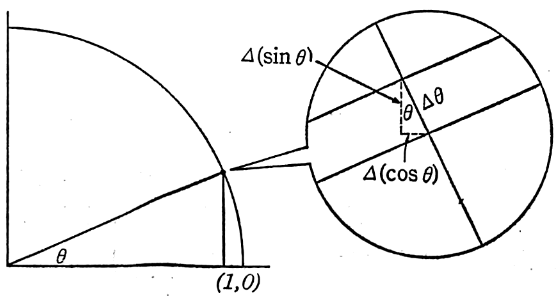


図 5

が成りたつ．

$$\tan\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta},\qquad \frac{d(\tan\theta)}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}.$$

2　逆関数（厳密は扱いは第７章）　二つの実関数 f, g が互いに他の逆関数であるとは，二つの方程式

$$y=f(x),\qquad x=g(y)$$

の，(x, y) 平面でのグラフが一致することである．

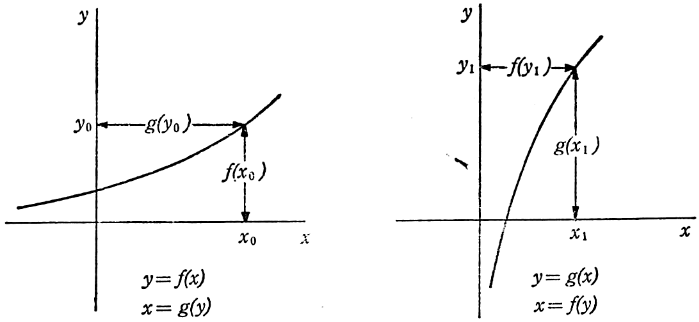


図 6

f が x で定義されていれば g は $f(x)$ で定義され，$g(f(x))=x$ が成りたつ．g が y で定義されていれば f は $g(y)$ で定義され，$f(g(y))=y$ が成りたつ．

たとえば，関数 $y=x^2$，$x\geqq 0$ は逆関数 $x=\sqrt{y}$ をもち，関数 $y=x^3$ は逆関数 $x=\sqrt[3]{y}$ をもつ．

f, g が互いに他の逆関数で，ともに微分可能ならば，$g(f(x))=x$ の両辺を微分することにより，$g'(f(x))\cdot f'(x)=1$ が得られる．したがって，

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)},\qquad y=f(x)$$

が成りたつ．

3　逆三角関数　　区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ で関数 $\sin x$ は両端を除いて微分可能な逆関数をもつ．これを $\arcsin y$ で表わす．定義域は $[-1, 1]$ である（図７）．区間 $[0, \pi]$ で関数 $\cos x$ は両端を除いて微分可能な逆関数をもつ．これを $\arccos y$ で表わす．定義域は $[-1, 1]$ である．区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ で関数 $\tan x$ は微分可能な逆関数をもつ．これを $\arctan x$ で表わす．定義域は実数全体である．

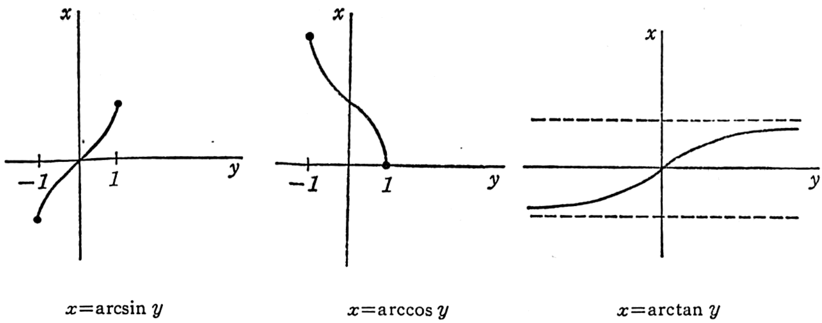


図 7

$$(\arcsin y)'=\frac{1}{(\sin x)'}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

$$(\arccos y)'=\frac{1}{(\cos x)'}=\frac{1}{-\sin x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

$$(\arctan y)'=\frac{1}{(\tan x)'}=\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{1+y^2}.$$

4　指数関数（厳密な扱いは第8章）　b が正の実数，x が有理数のとき，b^x はすでに定義されている．x が無理数のときは b^x はまだ定義されていない．しかし，正の実数 b に対し，実数全体で定義された微分可能な関数で，x が有理数のときには b^x と一致するようなものが唯一つ存在する（第8章）．この関数を b^x で表わす．有理数のときと同じく，指数法則が成りたつ：

$$b^{x+y}=b^x\cdot b^y,\qquad b^{xy}=(b^x)^y.$$

関数 b^x の導関数を計算しよう．

$$\frac{d(b^x)}{dx}=st\left[\frac{b^{x+\Delta x}-b^x}{\Delta x}\right]=st\left[\frac{(b^{\Delta x}-1)b^x}{\Delta x}\right]=st\left[\frac{b^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right]b^x.$$

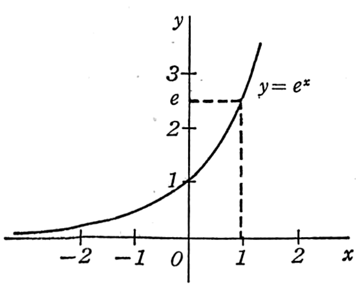


図 8

特に，$st\left[\frac{b^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right]=1$ となる実数 b が唯一つ存在する．これを**自然対数の底**と言い，e で表わす．関数 $y=e^x$ を**指数関数**と言う．e^x の導関数は e^x 自身である．数 e は2と3の間の無理数である：$e=2.71828\cdots$．

5　対数関数（厳密な定義は第8章）　関数 e^x は微分可能な逆関数をもつ．これを（自然）**対数関数**と言い，$\log x$ で表わす．$\log x$ は正の実数全体で定義される．

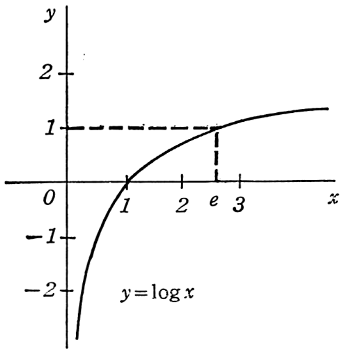


図 9

$$\log xy=\log x+\log y, \qquad \log x^y=y\cdot\log x$$

が成りたつ．$y=\log x$ の導関数はつぎのように計算される．

$$\frac{d(\log x)}{dx}=\frac{1}{(e^y)'}=\frac{1}{x} \quad (x>0).$$

練 習 問 題 2E

1.　（1）　もう三種類の三角関数をつぎの式で定義する：

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \quad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}, \quad \operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}.$$

これらの関数の略図をかき，導関数を求めよ．

（2）　$\cot x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$，$\sec x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$，$\operatorname{cosec} x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数をそれぞれ $\operatorname{arccot} y$，$\operatorname{arcsec} y$，$\operatorname{arccosec} y$ で表わす．これらの関数の略図をかき，導関数を求めよ．

2.　導関数を求めよ．

（1）　$\sqrt{1+\sin\theta}$　（2）　$\frac{1}{1+e^x}$　（3）　e^{-x^2}　（4）　$\log(\tan\theta)$

（5）　$\cos(\log x)$　（6）　$(\arcsin x)^2$　（7）　$\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$

（8）　$\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}$

3.　n 階導関数を求めよ．

（1） $\sin x$　（2） e^{ax}　（3） $e^{ax}\sin bx$

4. （a） b^x の導関数を求めよ．

（b） b^x の逆関数を底 b の対数関数と言い，$\log_b x$ と書く．導関数を求めよ．

5. $\sin x=0$ となる超実数の全体は超整数の π 倍の全体であることを示せ．すなわち，

$\{x\in \boldsymbol{R}^*\,;\,\sin x=0\}=\{n\pi\,;\,n\in \boldsymbol{Z}^*\}$.

ヒント　$A=\{n\pi\,;\,n\in \boldsymbol{Z}\}$ とおき，つぎの二つの式系を考えて解の公理を使え．

$$S:\sin x=0 \qquad T:x\in A$$

6. 三つの関数 f,g,h をつぎのように定める：

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

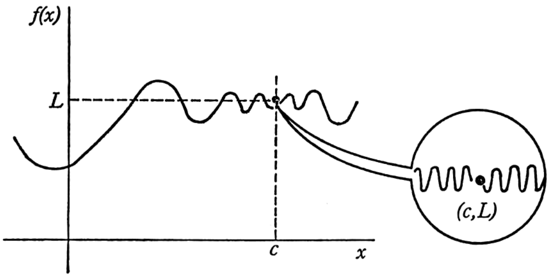
これらの関数の 0 での微分可能性を調べよ．微分可能ならば勾配を求めよ．

3 連続関数

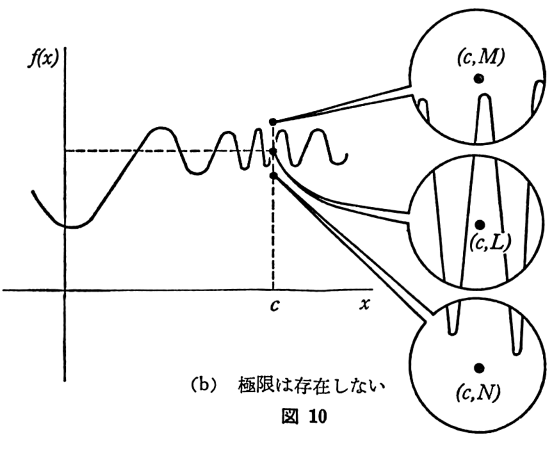
3A 極限と連続性

超実数を使って関数の極限および連続性の概念を扱う．我々の定義が標準的な ε-δ 式の定義と同値であることは第5章で示す．

定義　L, c を実数，f を実関数とする．$x\approx c$，$x\neq c$ なる任意の超実数 x に対して $f(x)\approx L$ が成りたつとき，《L は x が c に近づくときの $f(x)$ の**極限**である》と言い，



(a)　$\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$



(b)　極限は存在しない

図 10

$$L=\lim_{x\to c} f(x)$$

と書く．

この状況を焦点 (c, L) の無限小顕微鏡で見ると図10のようになる．$x\approx c$, $x\neq c$ なる超実数 x に対する点 $(x, f(x))$ を視野に入れるためには，顕微鏡の拡大率を $\dfrac{1}{|x-c|}$ より小さくしなければならない．

$\lim_{x\to c} f(x)=L$ となるのは，$x\approx c$, $x\neq c$ なる任意の超実数 x に対し，点 $(x, f(x))$ が，焦点 (c, L) の**ある**無限小顕微鏡の視野に入るときである．

極限は標準部分を計算して求まることがある．定義により，c に無限に近いあらゆる $x\neq c$ に対して $st(f(x))=L$ なら，

$$\lim_{x\to c} f(x)=L$$

となる．$\lim f(x)$ が存在するときは，c の単子に属するあらゆる $x\neq c$ に対して $f(x)$ が定義されていなければならない．したがって，節1Dの系4により，c のある近傍に属するあらゆる実数 $x\neq c$ に対して $f(x)$ が定義されていることになる．

例1　$\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4}$ を求める．中の関数は $x=2$ では定義されていない．$x\approx 2$, $x\neq 2$ なる任意の超実数 x に対し，

$$\frac{x^2+3x-10}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x+5}{x+2}.$$

$$st\left(\frac{x^2+3x-10}{x^2-4}\right)=st\left(\frac{x+5}{x+2}\right)=\frac{2+5}{2+2}=\frac{7}{4}.$$

したがって $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4}=\dfrac{7}{4}$.

例2　$\lim_{x\to 0} x^n=0$ (n は1以上の自然数)．実際，x が0でない無限小ならば，節1A定理3によって x^n も無限小である．

つぎの定理はただちに得られる．

定理1　f の a での勾配は，極限

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

によって与えられる．

例3　a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,　　b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

なぜなら，$f(x)=\sin x$，$g(x)=e^x$ とすると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\cos 0=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=e^0=1.$$

$\boldsymbol{R}$ の部分集合 Y に関する極限をつぎのように定義する.

定義　L, c を実数とする. $x\in Y^*$，$x\approx c$，$x\neq c$ なる任意の超実数 x に対して $f(x)\approx L$ が成りたつとき，L を，x が Y の中で c に近づくときの $f(x)$ の**極限**と言い，

$$L=\lim_{\substack{x\to c\\ x\in Y}} f(x)$$

と書く.

この中で特に大事なのは片側からの極限である：

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} f(x),$$

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} f(x).$$

例 4　$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ であるが，$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$ は存在しない.

つぎの定理も簡単である.

定理 2　$\lim_{x\to c} f(x)$ が存在するのは，左右からの片側極限がともに存在して一致するときである：

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x).$$

標準部分の諸規則により，極限に関するよく知られた規則がすぐ出る.

定理 3（極限に関する規則）

$$\lim_{x\to c} f(x),\qquad \lim_{x\to c} g(x)$$

がともに存在すれば，

（i）　任意の実定数 k に対し，$\lim_{x\to c} kf(x)=k\lim_{x\to c} f(x)$.

（ii）　$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x)$.

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x)=(\lim_{x\to c} f(x))(\lim_{x\to c} g(x))$.

(iv) $\lim_{x\to c} g(x)\neq 0$ なら，$\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$.

証明 たとえば (ii) を証明してみよう．$x\approx c$，$x\neq c$ なら，

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=st(f(x)+g(x))$$
$$=st(f(x))+st(g(x))=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x). \qquad \dashv$$

定義 $f(c)$ が存在し，しかも $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ のとき，f は実数 c で**連続**であると言う．

極限の定義から明らかに，f が c で連続なのは，$x\approx c$ なる任意の超実数 x に対して $f(x)\approx f(c)$ となるときである．もちろん，f が c で連続ならば，c のある近傍のあらゆる実数 x で $f(x)$ が定義されていなければならない．定理3により，c で連続な二つの関数の和，積，商（分母が0でないとして）は c で連続である．

例5 $y=\sqrt{|x|}$ は0で連続である．実際，x が0でない無限小ならば $\sqrt{|x|}$ も無限小である．しかし，これは0で微分可能ではない．

例6 二つの実関数 f,g をつぎのように定義する：

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases},\qquad g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

f は0で不連続，g は0で連続である．実際，任意の実数 y に対して $|\sin y|\leqslant 1$ だから，任意の超実数 y に対して $|\sin y|\leqslant 1$ が成りたつ．x が0でない無限小ならば，

$$|g(x)-g(0)|=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant |x|.$$

したがって g は0で連続である．一方，練習問題2E—5と同じ方法により，$|\sin y|=1$ となる超実数 y の全体は $\left\{n\pi+\frac{\pi}{2}\,;\, n\in \boldsymbol{Z}^*\right\}$ と一致することが分る．無限大超整数 n を取り，$x=\dfrac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$ とすると，$x\approx 0$ であり

$$|f(x)|=\left|\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=1$$

だから，f は0で連続でない．

例7 多項式関数はいたるところ連続である．有理関数は，それを既約分数式の形に $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ と表わしたとき，多項式 $g(x)$ の零点以外で連続である．

定理 4　f が c で微分可能なら f は c で連続である.

証明　f が c で微分可能なら $f(c)$ が存在し, $x\approx c$, $x\neq c$ なる任意の x に対して

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

は有限超実数である. 分母 $x-c$ は無限小だから分子 $f(x)-f(c)$ も無限小, すなわち $f(x)$ は $f(c)$ に無限に近い. ⊣

定理 5　連続関数の合成関数は連続である. すなわち, f が c で連続, G が $f(c)$ で連続ならば, $g(x)=G(f(x))$ は c で連続である.

証明　$x\approx c$ なら $f(x)\approx f(c)$ だから,

$$g(x)=G(f(x))\approx G(f(c))=g(c). \qquad ⊣$$

つぎに $\boldsymbol{R}$ の部分集合 Y 上での連続性および一様連続性を定義する.

定義　Y を f の定義域の部分集合とする. Y の任意の点 c (実数) および $x\approx c$, $x\in Y^*$ なる任意の超実数 x に対して $f(x)\approx f(c)$ が成りたつとき, f は **Y 上連続**であると言う. また, $x, y\in Y^*$, $x\approx y$ なる任意の超実数 x, y に対して $f(x)\approx f(y)$ が成りたつとき, f は Y 上**一様連続**であると言う.

例 8　$f(x)=x$ ($x\in\boldsymbol{R}$) は一様連続である (明らか). しかし, $f(x)=x^2$ ($x\in\boldsymbol{R}$) は一様連続でない. 実際, 無限大超整数 n を取り, $x=n$, $y=n+\dfrac{1}{n}$ とすると, $x, y\in\boldsymbol{R}^*$, $x\approx y$ であるが,

$$f(y)-f(x)=\left(n+\frac{1}{n}\right)^2-n^2=2+\frac{1}{n^2}\not\approx 0. \qquad ⊣$$

例 9　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ は $[1,\infty)$ で一様連続であるが, $(0,1]$ では一様連続でない. 実際, まず $x, y\in[1,\infty)^*$, $x\approx y$ とする. x, y が無限大なら $f(x)-f(y)\approx 0-0=0$. x, y が有限なら, 節 1 A 定理 6 により, $x\approx c$, $y\approx c$ なる実数 c が存在する. x, y, c はすべて 1 以上だから,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right|+\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{c}\right|=\frac{|c-x|}{xc}+\frac{|c-y|}{yc}\\&\leqslant|c-x|+|c-y|\approx 0.\end{aligned}$$

つぎに, 無限大超自然数 n を取り, $x=\dfrac{1}{n}$, $y=\dfrac{1}{n+1}$ とすると, $x, y\in(0,1]^*$, $x\approx y\approx 0$ であるが,

$$f(x)-f(y)=n-(n+1)=-1\not\approx 0. \qquad ⊣$$

明らかに, 一様連続なら連続である.

$\boldsymbol{R}$ の有界閉集合のことをコンパクト集合と言うのだった (節1D). たとえば，閉区間 $[a,b]$ はすべてコンパクトである．節1Dの系6により，Y がコンパクトであるためには，Y^* の任意の点 y が有限で，$st(y)$ が Y に属することが必要十分である．

定理 6 Y を実数のコンパクト集合とする．f が Y 上連続なら，f は Y 上一様連続である．

証明 f が Y で連続とし，$x, y \in Y^*$，$x \approx y$ とする．Y はコンパクトだから，x は有限で，$c = st(x)$ は Y に属する．$x \approx y$ だから $c = st(y)$ でもある．連続性の仮定により，

$$f(x) \approx f(c), \qquad f(y) \approx f(c)$$

だから $f(x) \approx f(y)$，すなわち f は Y 上一様連続である． ⊣

f がある集合 Y 上一様連続なら，Y の任意の部分集合の上でも f は明らかに一様連続である．逆に，つぎの定理は，一様連続関数の定義域を拡大するものである．

定理 7 (i) f がある区間 I 上で一様連続ならば，実数直線全体で一様連続な関数 g で，I 上では f と一致するものが存在する．

(ii) f の導関数 f' がある区間上で一様連続ならば，実数全体の上の関数 g で，I 上では f と一致し，しかも $\boldsymbol{R}$ 上 g' が一様連続なるものが存在する．

証明 I が開区間 $(-\infty, b)$ の場合に証明する．その他の場合も同様である．

(i) f が一様連続と仮定する．まず $\lim_{x \to b^-} f(x)$ が存在することを示す．$x < b$，$x \approx b$ とする．かりに $f(x)$ が無限大だとしてみよう．すると，b より小さい任意の実数 u は，式系

$$u < y < b, \qquad |f(u) - f(y)| \geqslant 1$$

の部分超実解である．そこで $u_1 < b$，$u_1 \approx b$ なる超実数 u_1 を取る．部分解定理 (節1C，定理5) により，ある超実数 y_1 が存在し，

$$u_1 < y_1 < b, \qquad |f(u_1) - f(y_1)| \geqslant 1$$

が成りたつ．ところが，$u_1 \approx y_1$ であるのに $f(u_1) \not\approx f(y_1)$ となってしまい，f の一様連続性に反する．したがって $f(x)$ は有限でなければならない．その標準部分を B としよう．$y < b$，$y \approx x$ なる任意の y に対して $f(y) = f(x)$ だから

$f(y)\approx B$, すなわち $B=\lim_{x\to b^-} f(x)$ となる.

つぎに関数 y を,

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x<b \text{ のとき} \\ B & x\geqq b \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定義する. 明らかに g は $I=(-\infty, b)$ 上では f と一致し, $\boldsymbol{R}$ 全体で一様連続である.

(ii) f' が一様連続とする. いま証明したことにより, 極限

$$B=\lim_{x\to b^-} f(x), \qquad C=\lim_{x\to b^-} f'(x)$$

が存在する. そこで, 関数 g を,

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x<b \text{ のとき} \\ B+C(x-b) & x\geqq b \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定義する. 明らかに g は $I=(-\infty, b)$ 上 f と一致し, 微分可能であり導関数 g は $\boldsymbol{R}$ 全体で一様連続である.　⊣

練 習 問 題 3 A

1. つぎの極限を求めよ.

(1) $\lim_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$　(2) $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$　(3) $\lim_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-(1+\Delta x)^2}}{\Delta x}$

(4) $\lim_{x\to 0^+} x\sqrt{1+x^{-2}}$　(5) $\lim_{x\to 0^-} x\sqrt{1+x^{-2}}$　(6) $\lim_{t\to 0^+}\dfrac{2+t^{-\frac{1}{2}}}{3-4t^{-\frac{1}{2}}}$

(7) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$　(8) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\log x}{x-1}$　(9) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$

2. 関数 f をつぎのように定める:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 1\leqq |x| \text{ のとき.} \\ \dfrac{1}{n} & \dfrac{1}{n}\leqq |x|<\dfrac{1}{n-1} \quad (n=2,3,4,\cdots) \text{ のとき.} \\ 0 & x=0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

このとき, f は 0 で連続であるが, $x=\pm\dfrac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で連続でないことを示せ.

3. 関数 f をつぎのように定める:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 1\leqq |x| \text{ のとき.} \\ \dfrac{1}{n^2} & \dfrac{1}{n}\leqq |x|<\dfrac{1}{n-1} \quad (n=2,3,4,\cdots) \text{ のとき.} \\ 0 & x=0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

このとき, f は 0 で微分可能であるが, $x=\pm\dfrac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で不連続であることを示せ.

4. 練習問題2E—6の関数 f, g, h について，(a) 0での連続性，(b) 区間 $[-1,1]$ での一様連続性，(c) 区間 $[1,\infty)$ での一様連続性を調べよ．

5. (a) 前問の関数 h の導関数 h' の0での連続性を調べよ．

(b) 関数 k を $k(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ によって定める．k はいたるところ微分可能である．導関数 k' の0での連続性を調べよ．

3B 超 整 数

積分や無限級数をはじめ，微積分のいろいろな分野で超整数は基本的な役割を演ずる．この節は超整数について述べ，次節でそれを使って中間値の定理および最大値の定理を証明する．

定義 整数の全体を $\boldsymbol{Z}$ と書く．$\boldsymbol{Z}$ の自然拡大 $\boldsymbol{Z}^*$ の元を**超整数**と言う．

もちろん $\boldsymbol{Z}^*\cap\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Z}$ である．すなわち，超整数かつ実数ならそれは整数である（節1D定理1 (i) を見よ）．

定理1 (i) $\boldsymbol{Z}^*$ は $\boldsymbol{R}^*$ の部分環である．すなわち，二つの超整数の和，差，積はまた超整数である．環 $\boldsymbol{Z}^*$ を**超整数環**と言う．

(ii) 任意の超実数 y に対し，$K\leqq y<K+1$ となる超整数が唯一つ存在する．

(iii) 正負の無限大超整数が存在する．

(iv) 超整数 K に対し，$K+1$ は K より大きい超整数の中で最小のものである．

(v) 有限超整数は整数である（節1D, 例2参照）．すなわち，

$$\boldsymbol{Z}^*\cap\mathrm{galaxy}(0)=\boldsymbol{Z}.$$

証明 (i) 式系

$$x\in\boldsymbol{Z},\qquad y\in\boldsymbol{Z} \tag{1}$$

の実解はすべて式

$$x+y\in\boldsymbol{Z} \tag{2}$$

の解である．したがって (1) の超実解はすべて (2) の解である，すなわち二つの超整数の和は超整数である．差，積に関しても同様．

(ii) 任意の実数 y に対し，

$$n\leqq y<n+1$$

となる整数 n が唯一つ存在する．この n を y の整数部分と言い，$[y]$ と書く．式系

$$[y]\leqslant y, \qquad y<[y]+1, \qquad [y]\in \boldsymbol{Z} \tag{3}$$

はあらゆる実数に対して成りたつ．したがって(3)はあらゆる超実数に対して成りたつ．$K=[y]$ とすればよい．

（iii） H を正の無限大超実数とすれば $K=[H]+1$ は正の無限大超整数である．

（iv） 整数 n に対し，$n+1$ は n のつぎの整数だから，式系

$$n\in \boldsymbol{Z}, \qquad n<x<n+1 \tag{4}$$

の実解はすべて式系

$$x\notin \boldsymbol{Z}, \qquad n+1\in \boldsymbol{Z} \tag{5}$$

の解である．だから(4)の超実解はすべて(5)の解であり，(iv)が成りたつ．

（v） K を有限超整数とする．$st(K)$ は実数だから，

$$n\leqslant st(K)<n+1$$

なる整数 n が存在する．この n は

$$0\leqslant |n-K|<1$$

をみたす．ところが(i)によって $|n-K|$ は超整数だから，(iv)によって $|n-K|=0$，すなわち $n=K$ であり，$K\in \boldsymbol{Z}$ となる．　⊣

微積分では，ある閉区間を長さの等しい無限に多くの小区間に分割することが有用である．超実数 x, y に対し，集合

$$[x, y]^*=\{z\in \boldsymbol{R}^*;\ x\leqslant z\leqslant y\}$$

を**超実閉区間**と言う．$a\leqslant x\leqslant y\leqslant b$ のとき，$[x, y]^*$ は $[a, b]^*$ の**超実部分区間**であると言う．正の無限小 $\varDelta x$ に対し，$[x, x+\varDelta x]^*$ を**無限小区間**と言う．誤解の恐れのないかぎり星印を省略し，$[x, x+\varDelta x]^*$ のことを $[x, x+\varDelta x]$ と書く．正の超整数 H に対し，閉超実区間 $[a, b]^*$ を長さ $\delta=\dfrac{b-a}{H}$ の部分区間 H 個に分割することができる．すなわち，

$$a,\ a+\delta,\ a+2\delta,\ \cdots,\ a+K\delta,\ \cdots,\ a+H\delta=b$$

がそれである．K は0から H までの超整数を走る．特に H が無限大ならば，各部分区間は幅 $\delta=\dfrac{b-a}{H}$ の無限小区間である．この分割を $[a, b]^*$ の**無限小分割**と言う．誤解の恐れがなければ，$[a, b]$ の無限小分割とも言う．各小区間は

$$[a+K\delta, a+(K+1)\delta]^*$$

の形である．

系 2　$[a, b]$ を閉実区間，H を正の超整数とし，$\delta=\dfrac{b-a}{H}$ と置く．超実半開区間 $[a, b)^*$ は，半開部分区間

$$[a+K\delta, a+(K+1)\delta)^* \qquad (K\in \boldsymbol{Z}^*,\ 0\leqslant K<H)$$

の，共通点のない合併集合である．

証明　xを $[a, b)^*$ の点とする．定理 1 により，超整数 K で，

$$K\leqslant\frac{x-a}{\delta}<K+1$$

となるものが唯一つ存在する．明らかに，

$$0\leqslant K<\frac{x-a}{\delta}=H, \qquad a+K\delta\leqslant x<a+(K+1)\delta. \qquad ⊣$$

3 C　区間上の連続関数

超整数を使って中間値の定理および最大値の定理を証明する．

中間値の定理　f を閉区間 $[a, b]$ 上連続な関数とする．$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の実数 D に対し，$f(c)=D$ となる実数 $c\in[a, b]$ が存在する．

証明　$f(a)\leqslant D\leqslant f(b)$ と仮定してもよい．整数nを取り，$\delta=\dfrac{b-a}{n}$ として有限分割

$$a,\ a+\delta,\ a+2\delta,\ \cdots,\ a+b$$

を考える．fの値は，これら小区間の少くとも一つで D をこえなければならないから，ある整数mを取ると，

$$0\leqslant m<n, \qquad f(a+m\delta)\leqslant D\leqslant f(a+(m+1)\delta) \tag{1}$$

が成りたつ．式系

$$n\in \boldsymbol{Z},\ 0<n,\ \delta=\frac{b-a}{n} \tag{2}$$

の実解はすべて式系 (1) の部分実解である．そこで n_1 を正の無限大超整数とし，$\delta_1=\dfrac{b-a}{n_1}$ と置く． 部分解定理により， ある超整数 m_1 に対して (1) が成りたつ．そこで $c=st(a+m_1\delta_1)$ と置く．$a\leqslant c\leqslant b$ および $f(c)=D$ を言えばよい．

$$a\leqslant a+m_1\delta_1, \qquad a+(m_1+1)\delta_1\leqslant a+n_1\delta_1=b$$

だから，標準部分を取ることによって $a \leqslant c \leqslant b$ が分る．f は $[a, b]$ 上連続だから，

$$f(c)=st(f(a+m_1\delta_1)) \leqslant D,$$

$$f(c)=st(f(a+(m_1+1)\delta_1)) \geqslant D$$

となり，したがって $f(c)=D$ が成りたつ．　⊣

例 1　奇数次の多項式には必ず零点があることを証明しよう．

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0 \qquad (a_n \neq 0,\ n \text{ は奇数})$$

とする．$a_n>0$ とする（$a_n<0$ の場合も同様）．上式を書きなおすと，

$$f(x)=a_n x^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x_n}\right).$$

x を正の無限大超実数とすると，$\frac{1}{x^k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ はすべて無限小だから，カッコの中は 1 に無限に近く，したがって $f(x)$ は正の無限大である．同様に $f(-x)$ は負の無限大である（$(-x)^n<0$ だから）．すなわち，式系

$$S:\ x>0,\ f(x)>0,\ f(-x)<0$$

は超実解をもち，したがって実解をもつ．区間 $[-x, x]$ に中間値の定理を使えばよい．

定義　$f(c) \geqslant f(x)$ が f の定義域のすべての実数 x に対して成りたつとき，f は実数 c で**最大値**を取る，または f は c で最大であると言う．**最小値**も同様に定義される．

定理 1　f が実数 c で最大値を取れば，f の自然拡大 f^* も c で最大となる．すなわち，f^* の定義域のすべての超実数 x に対して $f(c) \geqslant f^*(x)$ が成りたつ．最小値に関しても同様．

証明　式 $f(x)=f(x)$ と式 $f(c) \geqslant f(x)$ とは同じ実解をもつ．したがってその超実解も一致する．　⊣

例 2　$f(x)=x$ $(x \in \boldsymbol{R})$ は最大値も最小値も持たない．$f(x)=x^2$ $(x \in \boldsymbol{R})$ は $x=0$ で最小となるが，最大値はない．区間を $[-1, 1]$ に制限すれば，$x=\pm 1$ で最大となる．区間を $(-1, 1)$ に制限すると最大値はない．

定義　実数 c のある実近傍 $(c-r, c+r)$ のあらゆる実数 x に対して $f(c) \geqslant f(x)$ が成りたつとき，f は c で**極大値**（または局所最大値）を取る，または f は c で**極大**であると言う．極小値も同様に定義される．

定理 2　f が実数 c で極大であるためには，c に無限に近いあらゆる超実数 x に対して $f(c) \geqslant f(x)$ が成りたつことが必要十分である．極小値についても

同様.

証明 f が c で極大，すなわち，ある区間 $(c-r, c+r)$ のあらゆる実数 x に対して $f(c) \geqslant f(x)$ が成りたつとする．定理1により，超実区間 $(c-r, c+r)^*$ のあらゆる超実数 x に対して $f(c) \geqslant f(x)$ が成りたつからよい．

つぎに f が c で極大でないとする．第一の場合として，f が c のある近傍全体で定義されていないとすれば，$x \approx c$ なるある超実数 x に対して $f(x)$ は定義されない（節1D，系4）．第二の場合，f が c のある近傍で定義されているとする．すると，任意の正実数 r に対し，$(c-r, c+r)$ の実数 x で，$f(c) < f(x)$ なるものが存在する．したがって，任意の正実数 r は，式系

$$c-r < x < c+r, \qquad f(c) < f(x) \tag{3}$$

の部分実解である．ところが，任意の正の無限小超実数 r_1 は (3) の部分超実解だから，c に無限に近いある超実数 x_1 に対して $f(c) < f(x_1)$ が成りたつ． ⊣

最大最小値の定理 閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数は最大値，最小値をもつ．

証明 f を $[a, b]$ 上の連続関数，n を正整数，$\delta = \dfrac{b-a}{n}$ として，有限分割

$$a,\ a+\delta,\ a+2\delta,\ \cdots,\ a+n\delta = b$$

を考える．有限個の値

$$f(a),\ f(a+\delta),\ \cdots,\ f(a+n\delta)$$

の最大値のうち，一番左側のものを $f(a+m\delta)$ とし，$m = g(n)$ と置く．すると，式系

$$n \in \boldsymbol{Z},\ 0 < n,\ \delta = \frac{b-a}{n},\ m = g(n) \tag{4}$$

の実解はすべて式系

$$a \leqslant a + m\delta \leqslant b \tag{4'}$$

の解である．さらに，式系

$$\text{式系 (4)},\ k \in \boldsymbol{Z},\ 0 \leqslant k \leqslant n \tag{5}$$

の実解はすべて式

$$f(a+m\delta) \geqslant f(a+k\delta) \tag{5'}$$

の解である．

n_1 を正の無限大超整数，$\delta_1 = \dfrac{b-a}{n_1}$，$m_1 = g(n_1)$（関数 g の自然拡大）と置く．

$$c = st(a + m_1\delta_1)$$

において f が最大値を取ることを示そう．三つ組 (n_1, δ_1, m_1) は式系 (4) の超実

解だから，それは（4′）の解でもある：

$$a \leqslant a+m_1\delta_1 \leqslant b.$$

標準部分を取って，

$$a \leqslant c \leqslant b$$

を得る．つぎに x を $[a,b]$ に属する任意の実数とする．節3Bの系2により，x は $[a,b]$ のつぎの形の無限小部分区間に属する：

$$[a+k_1\delta_1,\ a+(k_1+1)\delta_1]^*.$$

ただし，k_1 は $0 \leqslant k_1 < n_1$ なる超整数である．当然，

$$x = st(a+k_1\delta_1)$$

となる．すると，四つ組 $(n_1, \delta_1, m_1, k_1)$ は式系（5）の超実解だから，それは式（5′）の解でもある．すなわち，

$$f(a+m_1\delta_1) \geqslant f(a+k_1\delta_1).$$

f は $[a,b]$ で連続だから，

$$f(c) = st(f(a+m_1\delta_1)) \geqslant st(f(a+k_1\delta_1)) = f(x)$$

が成りたつ．すなわち f は c で最大値を取る．　⊣

臨界点の定理　区間 I 上の連続関数 f が I の点 c で最大値または最小値を取るとする．このとき，つぎの三つの場合のどれかが必ず起る：

（i）　c は I の端点である．

（ii）　$f'(c)$ は定義されない．

（iii）　$f'(c)=0$.

証明　（i）でも（ii）でもない，すなわち c は I の端点ではなく，$f'(c)$ が存在すると仮定して，$f'(c)=0$ を示せばよい．f は c で最大だとしよう．Δx を正の無限小とすると，

$$f(c+\Delta x) \leqslant f(c), \qquad f(c-\Delta x) \leqslant f(c).$$

$$\therefore\quad \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leqslant 0 \leqslant \frac{f(c-\Delta x)-f(c)}{-\Delta x}.$$

$$\therefore\quad st\left(\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\right) \leqslant 0 \leqslant st\left(\frac{f(c-\Delta x)-f(c)}{-\Delta x}\right).$$

したがって $f'(c) \leqslant 0 \leqslant f'(c)$，すなわち $f'(c)=0$.

この定理の c，すなわち（i），（ii），（iii）のどれかの場合の c を f の**臨界点**と言う．そのうち，I の端点でないものを f の**内部臨界点**と言う．

平均値の定理　関数 f は閉区間 $[a,b]$ 上連続，開区間 (a,b) で微分可能とする．このとき，(a,b) の点 c で，そこでの勾配が区間の平均勾配に一致するもの，すなわち

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

となるものが存在する．

この定理は，最大最小値の定理と臨界点の定理とから，標準的手法だけで簡単に証明できる．実際，

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

とすると，y は $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能である．また，$g(a)=g(b)=f(a)$．g が恒等的に $f(a)$ に等しければ，(a,b) の任意の点 c で $g'(c)=0$ となるからよい．g が恒等的に $f(a)$ に等しくなければ，最大最小値の定理により，(a,b) のある点 c で g は最大または最小となる．臨界点の定理によって $g'(c)=0$ が成りたつ．　⊣

中間値の定理，最大最小値の定理，平均値の定理から，つぎに示すように，超実数にも関連する重要な結果がいくつか得られる．

以下，f は区間上の連続実関数，x, y は I^* の超実数で $x<y$ とする．

超実中間値の定理　$f(x)$ と $f(y)$ の間の任意の超実数 u に対し，$f(z)=u$ となる超実数 z が x と y の間に存在する．

超実最大最小値の定理　f は超実閉区間 $[x,y]^*$ 上で最大値，最小値を取る．すなわち，超実数 $z\in[x,y]^*$ が存在し，あらゆる超実数 $u\in[x,y]^*$ に対して $f(z)\geqslant f(u)$ が成りたつ．

超実平均値の定理　f が I の内部で微分可能とすると，

$$x<z<y, \qquad f'(z)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

なる点 $z\in(x,y)^*$ が存在する．$f'(z)$ は，f' の自然拡大 $(f')^*$ の z での値である．

証明　三つの定理はどれも同じように証明できる．たとえば超実最大値の定理を証明してみよう．実最大値定理を I の任意の部分閉区間 $[x_0,y_0]$ に適用することにより，f はある実数 $z_0\in[x_0,y_0]$ で最大となる．これを x_0, y_0 の関数と

考えて $z_0=g(x_0, y_0)$ と書く．すると，式系

$$x_0 \in I, \qquad y_0 \in I, \qquad x_0 \leqslant u_0 \leqslant y_0 \tag{6}$$

の実解はすべて式系

$$x_0 \leqslant g(x_0, y_0) \leqslant y_0, \qquad f(g(x_0, y_0)) \geqslant f(u_0) \tag{7}$$

の解である．したがって (6) の超実解はすべて (7) の解である．すなわち，f は $z=g(x, y)$ において，$[x, y]^*$ 上での最大値を取る． ⊣

以下，超実平均値の応用を二つ挙げてこの節を終る．

二階導関数による極大極小の判定

(i)　$f'(c)=0$, $f''(c)<0$ なら f は c で極大である．

(ii)　$f'(c)=0$, $f''(c)>0$ なら f は c で極小である．

証明　(i) を示す．$f''(c)$ が存在するのだから，f も f' も c のある近傍で定義されている．定理 2 により，c に無限に近い任意の x に対して $f(c) \geqslant f(x)$ が成りたつことを言えばよい．$f(c)<f(x)$ と仮定する．$c<x$ の場合，超実平均値の定理により，

$$c<t<x, \qquad f'(t)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

なる超実数 t が存在する．仮定によって $f'(t)>0$．一方 $f'(c)=0$ だから

$$\frac{f'(t)-f'(c)}{t-c}=\frac{f'(t)}{t-c}>0.$$

両辺の標準部分を取って，

$$f''(c)=st\left(\frac{f'(t)-f'(c)}{t-c}\right) \geqslant 0.$$

これははじめの仮定 $f''(c)<0$ に反する．$c>x$ の場合も同様である．したがって $f(c) \geqslant f(x)$ となる． ⊣

例 3　$f(x)=\frac{x^4}{2}-x^2$ の極大極小を求める．

$$f'(x)=2x^3-2x=2x(x+1)(x-1), \qquad f''(x)=6x^2-2=2(3x^2-1),$$
$$f''(0)=-2<0, \qquad f''(\pm 1)=4>0.$$

したがって f は 0 で極大，± 1 で極小となる (図11)．

例 4　$f(x)=x^n$ $(n \geqslant 3)$ の極大極小．$f'(x)=nx^{n-1}$ だから，候補としては $x=0$ だけである．$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$ だから $f''(x)=0$ であり，我々の方法では判定できない．

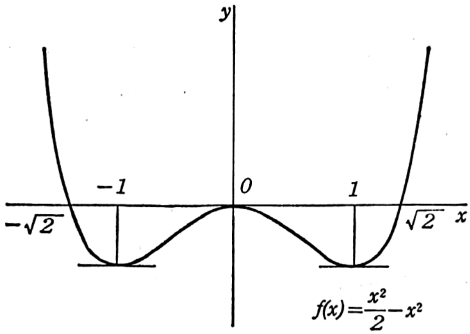


図 11

定義　実関数 f が実数 c のある実近傍で微分可能であり，導関数 f' が c で連続のとき，f は c で**滑らか**であると言う．ある区間の各点で滑らかなとき，f はその区間で滑らかであると言う．

つぎの定理は，f が滑らかであるためには，$f'(x)$ を表わす公式が x が超実数である場合にも成りたつことが必要十分であることを示す．

定理 3　f を開区間 I 上の微分可能な実関数とする．つぎの二条件は同値である．

（i）f の導関数は連続である．すなわち，$c\in I$，$x\approx c$ なら $f'(x)\approx f'(c)$ が成りたつ．

（ii）$c\in I$，$x\approx c$，$\Delta x\approx 0$，$\Delta x\neq 0$ に対し，

$$f'(c)\approx\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

証明　1°（i）⇒（ii）超実平均値の定理により，x と $x+\Delta x$ の間の超実数 t で，

$$f'(t)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

なるものがある．$t\approx x\approx c$ だから，仮定によって $f'(c)\approx f'(t)$ となる．

2°（ii）⇒（i）式系

$$x\in I,\qquad \varepsilon>0 \tag{8}$$

の実解はすべて式系

$$0<\Delta x<\varepsilon, \qquad \left|f'(x)-\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|<\varepsilon \tag{9}$$

の部分超実解である（Δx を無限小に取ればよい）. $c\in I$, $x_1\approx c$, $\varepsilon_1\approx 0$, $\varepsilon_1>0$ とする. I は閉区間だから $x_1\in I^*$, したがって x_1, ε_1 は式系 (**8**) の超実解である. 部分解定理により, (**9**) を成立させるような Δx_1 が存在する. この Δx_1 について,

$$f'(x_1)\approx\frac{f(x_1+\Delta x_1)-f(x_1)}{\Delta x_1}$$

が成りたつ. $\Delta x_1\approx 0$ だから, (ii) の仮定により,

$$f'(c)\approx\frac{f(x_1+\Delta x_1)-f(x_1)}{\Delta x_1}$$

が成りたち, $f'(x_1)\approx f'(c)$ となる. ⊣

閉区間の場合のつぎの系はしばしば有効である.

系 4　f が閉区間 $[a, b]$ で連続な導関数をもつとする. このとき, $[a, b]^*$ の任意の無限小部分閉区間 $[x, x+\Delta x]^*\subseteq[a, b]^*$ に対して

$$f'(x)\approx\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

が成りたつ.

証明　節 3 A の定理 7 により, いたるところ連続な導関数をもつ関数 g で, $[a, b]$ 上では f と一致するものが存在する. この g に定理 3 を適用すればよい. ⊣

練 習 問 題 3C

1.　つぎの関数は区間 $[0, 1]$ に少くとも一つの零点をもつことを示せ.

（1）$\dfrac{1}{1+x\sqrt{x}}-\sqrt{x^2+2}$　　（2）$x^6-5x^5-3x^2+4$　　（3）$\dfrac{1}{x}-2$

2.　f, g が $[a, b]$ で連続, $f(a)<g(a)$, $f(b)>g(b)$ であれば, $f(c)=g(c)$ となる点 $c\in(a, b)$ が存在することを示せ.

3.　連続な f が $f(0)=0$, $f(1)=4$, $f(2)=0$ をみたすとき, $f(c)=f(c+1)$ となる点 $c\in(0, 1)$ が存在することを示せ.

4.　連続な f が $f(0)=1$, $f(1)=0$ をみたすとき, $f(c)=c$ となる点 $c\in(0, 1)$ が存在することを示せ.

5.　(a)　実数のコンパクト集合 Y には最大元, 最小元があることを示せ.

(b)　Y が実数のコンパクト集合, f が Y 上連続な関数であれば, 値域 $\{f(x)\,;\,x$

$\in Y\}$ もコンパクトであることを示せ.

(c) (a), (b) の結果を使って最大最小値の定理の別証明を与えよ.

6. f が微分可能, $x<c$ で $f'(x)>0$, $c<x$ で $f'(x)<0$ なら f は c で極大となることを示せ.

7. f が微分可能, $f'(x)>1$, $f(0)=0$ なら $x>0$ に対して $f(x)>x$ となることを示せ.

8. f が二回微分可能で, いたるところ $f''(x)>0$ とする. f のグラフ上の二点を結ぶ線分は, その間の f のグラフより上にあることを示せ.

9. f が微分可能で $f(0)=A$, $f'(x)=B$ なら $f(x)=A+Bx$ であることを示せ. ヒント：平均値の定理を使え.

10. つぎの関数の極大極小を求めよ.

(1) $\dfrac{x}{x^2+1}$　(2) $x+\dfrac{4}{x^2}$　(3) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$　(4) $x^{\frac{1}{3}}+1$

(5) $x^m-1-m(x-1)$ $(m\in \boldsymbol{Z},\ m\geqq 2,\ x>0)$　(6) $\sin x\cos x$　(7) xe^x

(8) $\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$　(9) $\log x-x^2$ $(x>0)$　(10) $e^{-ax}-e^{-bx}$ $(0<a<b)$.

11. 関数 $(x^2-1)^n$ の n 階導関数は, 区間 $(-1,1)$ に n 個の零点をもつことを示せ.

4 積　分

この章では超実数を使ってリーマン積分を扱う．理論をできるだけ初等的にするため，もっぱら連続関数を扱うことにする．

仮定　この章を通じ，f や g は区間 I 上で連続な関数を表わす．

4A 定 積 分

正の実関数 f に対し，三つの直線 $x=a$, $x=b$, $y=0$ と曲線 $y=f(x)$ とで囲まれた領域を考える．これを，a から b までの $y=f(x)$ の**下にある領域**と言う．この領域の面積を二変数 a, b の関数と見て $A(a, b)$ と書く．まず定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

を定義し，この節とつぎの節でこれが a から b までの $y=f(x)$ の下の領域の面積に等しいことを示す．方針はつぎのとおりである．まず，直観的な面積の概念のもついくつかの性質を列挙する．つぎに定積分がこれらの性質をもつことを示す．最後に，これらの性質をもつ関数は定積分以外にないことを示す．

定義　I の二元の対の全体を定義域とする関数 $A(u, w)$ がつぎの性質をもつとき，A を f の**面積関数**と言う：

(i)　加法性．I の元 a, b, c に対して

$$A(a, c)=A(a, b)+A(b, c).$$

(ii)　方形性．$a, b\in I$, $a<b$ で，f の $[a, b]$ での最小値を m, 最大値を M とするとき，

$$m(b-a)\leqslant A(a, b)\leqslant M(b-a).$$

方形性とは，領域の面積がそれにそれぞれ内接，外接する方形の面積の間にあるという性質である．加法性からただちに

$$A(a,a)=0, \qquad A(b,a)=-A(a,b)$$

が出る．だから，$a<b$ なる $a,b\in I$ に対する値 $A(a,b)$ が決まれば関数 A は決まる．

つぎにリーマン和の概念を導入する．ものごとを簡単にするため，$[a,b]$ の分割としては，最後の小区間のほかはすべて同じ幅であるようなものだけを考える．

定義　$[a,b]$ を I の部分区間，Δx を正の実数とする．$a+n\Delta x\leqslant b$ なる最大の整数を n とし，

$$x_0=a,\ \ x_1=a+\Delta x,\ \ \cdots,\ \ x_n=a+n\Delta x$$

と置く．有限和

$$f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+\cdots+f(x_{n-1})\Delta x+f(x_n)(b-x_n)$$

を，Δx に対する f の a から b までの**リーマン和**と言い，

$$\sum\nolimits_a^b f(x)\Delta x$$

と書く．

幾何学的に言うと，我々の分割の小区間の幅はほとんどすべて Δx であるが，$\dfrac{b-a}{\Delta x}$ が整数でないかぎり，一番右の小区間 $[x_n,b]$ の幅は Δx より小さい．そしてリーマン和は，各小区間の上に，その左端での f の値を高さとして作った細長い方形の面積の総和である．

リーマン和 $\sum_a^b f(x)\Delta x$ は三変数 $a,b,\Delta x$ の実関数である．a,b を固定すればそれは一変数 Δx の関数である．この Δx を正実数でなく，正の無限小超実数 dx で置きかえると，自然拡大として**無限リーマン和**

$$\sum\nolimits_a^b f(x)dx$$

が得られる．この無限リーマン和の標準部分として積分を定義しようというのである．そのために，まず無限リーマン和が有限超実数であること，したがって標準部分が存在することを示す．

定理 1　$a,b\in I$，$a<b$ とし，dx を正の無限小とする．dx に対する無限リーマン和 $\sum_a^b f(x)dx$ は有限超実数である．

証明　$[a,b]$ 上の f の最小値を m，最大値を M とする．任意の正実数 Δx

に対して

$$\sum_a^b m\varDelta x \leqslant \sum_a^b f(x)\varDelta x \leqslant \sum_a^b M\varDelta x,$$

$$\sum_a^b m\varDelta x = m(b-a), \qquad \sum_a^b M\varDelta x = M(b-a)$$

が成りたつ．したがって，式

$$\varDelta x > 0$$

の実解はすべて式系

$$m(b-a) \leqslant \sum_a^b f(x)\varDelta x \leqslant M(b-a) \tag{1}$$

の解である．$dx>0$ だから，dx は (1) の超実解であり，したがって $\sum_a^b f(x)dx$ は有限である． ⊣

定義 $a, b \in I$, $a<b$ とし，dx を正の無限小とする．dx に対する f の a から b までの無限リーマン和 $\sum_a^b f(x)dx$ の標準部分を，dx に対する f の a から b までの**定積分**と言い，

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書く．さらに，

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

と置く．

正の無限小 dx を決めてしまえば，定積分

$$\int_u^w f(x)dx$$

は二変数 u, w の実関数である．それは《かりの変数》x とは無関係である．しかし，我々はいつも，かりの変数 x と無限小 dx とがうまく対応するような記号を使う．そうすると，変数が二つ以上の関数を積分するとき，どの変数に関して積分するのかが一見して分る．たとえば，

$$\int_0^1 x^2t\,dx = \frac{1}{3}t, \qquad \int_0^1 x^2t\,dt = \frac{1}{2}x^2.$$

定積分の性質を調べよう．

定理 2 $a, b \in I$, $a<b$ とし，c を実定数，dx を正の無限小とする．

（i） $\int_a^b c\,dx=c(b-a)$.

（ii） $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$.

（iii） $\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$.

（iv） あらゆる $x\in[a,b]$ に対して $f(x)\leqslant g(x)$ なら

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx.$$

証明　どの公式もつぎの三つの段階で証明される：まず有限リーマン和に対する同様な公式を示し，つぎに解の公理によってそれが無限リーマン和に対しても成りたつことを示し，最後に両辺の標準部分を取る． ⊣

つぎの定理は，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ が無限小 dx の取りかたによらないことを示す．

定理 3　$a,b\in I$，$a<b$ とし，dx および du を正の無限小とすると，

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(u)du$$

が成りたつ．したがって，

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\Delta x\to 0^+}\sum_a^b f(x)\Delta x$$

と書ける．

証明　dx, du の役割は対等だから，任意の正実数 r に対して

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b f(u)du+r$$

が成りたつことを示せばよい．$c=\dfrac{r}{b-a}$ と置く．もし，不等式

$$\sum_a^b f(x)dx\leqslant\sum_a^b (f(u)+c)du \qquad (2)$$

が成りたつことが分れば，標準部分を取ると，定理 2 によって

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b (f(u)+c)du=\int_a^b f(u)du+r$$

となって証明を終る．

(2) の証明．$\Delta x, \Delta u$ を正の実数とする．もしかりに真不等式

$$\sum_a^b f(x)\Delta x>\sum_a^b (f(u)+c)\Delta u$$

が成りたつとすると，$[a,b]$ の少くとも一点 y で，その上に立つ $\sum_a^b f(x)\Delta x$ の方形の方が $\sum_a^b (f(u)+c)\Delta u$ の方形よりも高くなければならない．したがって，$[a,b]$ の点 x_0, u_0 で

$$x_0-\Delta u \leqslant u_0 \leqslant x_0+\Delta x, \qquad f(x_0)>f(u_0)+c$$

となるものが存在する（図 12）.

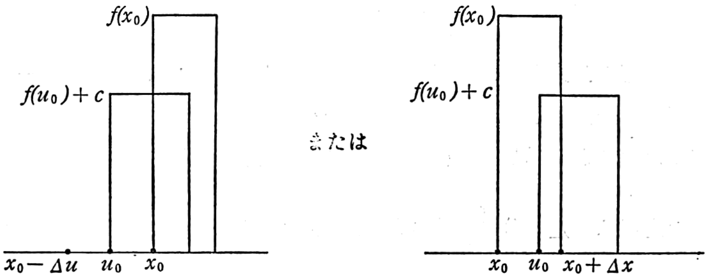


図 12

以上をまとめて，式系

$$\Delta x>0,\ \ \Delta u>0,\ \ \sum_a^b f(x)\Delta x>\sum_a^b (f(u)+c)\Delta u \tag{3}$$

の実解はすべて式系

$$a\leqslant x_0\leqslant b,\ \ a\leqslant u_0\leqslant b,\ \ x_0-\Delta u\leqslant u_0\leqslant x_0+\Delta x,\ \ f(x_0)>f(u_0)+c \tag{4}$$

の部分実解である．

そこで (2) が成りたたないと仮定すると，

$$dx>0,\ \ du>0,\ \ \sum_a^b f(x)dx>\sum_a^b (f(u)+c)du \tag{3'}$$

だから，dx, du は (3) の超実解であり，したがって部分解定理により，ある超実数 x_1, u_1 に対して (4) が成りたつ：

$$a\leqslant x_1\leqslant b,\ \ a\leqslant u_1\leqslant b,\ \ x_1-du\leqslant u_1\leqslant x_1+dx,\ \ f(x_1)>f(u_1)+c. \tag{4'}$$

ところが，dx, du は無限小だから，$x_1\approx u_1$，一方 $f(x_1)\not\approx f(u_1)$ であり，f の一様連続性（節 3 A 定理 6 による）に反する．したがって (2) が成りたっていなければならない．　⊣

今後 $\int_a^b f(x)dx$ と書いたら，dx はある正の無限小を表わす．上の定理によって，それが何であるかは問題にならない．

定理 4　定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は f の面積関数である.

証明　方形性は定理 2 からすぐ分る. 実際,

$$m \leqq f(x) \leqq M$$

だから,

$$m(b-a)=\int_a^b m dx \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b M dx = M(b-a).$$

つぎに加法性を示す. 定理 3 により, 具合のよい正の無限小 dx を使えばよい. $a<b<c$ $(a, b, c \in I)$ とし, 正整数 n を取って $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ と置く. すると $b=a+n\Delta x$ は $[a, c]$ の Δx 分割の分点だから,

$$\sum_a^c f(x)\Delta x=\sum_a^b f(x)\Delta x+\sum_b^c f(x)\Delta x \tag{5}$$

が成りたつ. したがって, 式系 (変数は $n, \Delta x$)

$$n \in \boldsymbol{Z},\ \ 0<n,\ \ \Delta x=\frac{b-a}{n} \tag{6}$$

の実解はすべて (5) の解である. そこで n_1 を正の無限大超整数とし, $dx=\dfrac{b-a}{n_1}$ と置く. n_1, dx は式系 (6) の超実解だから, それは (5) の解でもある. すなわち,

$$\sum_a^c f(x)dx=\sum_a^b f(x)dx+\sum_b^c f(x)dx$$

が成りたつ. dx は正の無限小だから, 標準部分を取って加法性

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$

を得る. ⊣

練 習 問 題 4 A

1. 関数 $A(u, v)$ は対応する関数 $f(x)$ の面積関数であることを示せ.

	$A(u,v)$	$f(x)$
(1)	$\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{1}{x^2}$ $(x>0)$
(2)	$\dfrac{1}{2}u^{-2}-\dfrac{1}{2}v^{-2}$	x^{-3} $(x>0)$
(3)	$\dfrac{1}{3}v^3-\dfrac{1}{3}u^3$	x^2

2. (1) b を正実数, n を正整数とし, $\Delta x=\dfrac{b}{n}$ と置く.

$$\sum_0^b x\Delta x=(1+2+\cdots+(n-1))\Delta x^2$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{b^2}{2}$$

を示せ．

（2）　$\int_0^b xdx=\frac{b^2}{2}$ を示せ．

3.　前問と同じことを関数 $f(x)=x^2$ に対して実行せよ．

4 B　微積分の基本定理

まず定積分が f の唯一つの面積関数であることを示し，それを使って微積分の基本定理を証明する．そのためにまず下リーマン和および上リーマン和という概念を導入する．ものごとを簡単にするため，Δx としては $[a,b]$ を等分したものだけを考える．

定義　　正整数 n に対し，$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ と置き，

$$x_k=a+k\Delta x \qquad (0\leqq k\leqq n)$$

と書く．また，区間 $[x,y]$ での f の最大値を $M(x,y)$，最小値を $m(x,y)$ と書く．このとき，有限和

$$M(x_0,x_1)\Delta x+M(x_1,x_2)\Delta x+\cdots+M(x_{n-1},x_n)\Delta x$$

を Δx に対する a から b までの f の**上リーマン和**と言い，

$$\sum\nolimits_a^b M(x,x+\Delta x)\Delta x$$

と書く．同様に，有限和

$$m(x_0,x_1)\Delta x+m(x_1,x_2)\Delta x+\cdots+m(x_{n-1},x_n)\Delta x$$

を f の**下リーマン和**と言い，

$$\sum\nolimits_a^b m(x,x+\Delta x)\Delta x$$

と書く．

幾何学的には，上下リーマン和は f のグラフにそれぞれ外接，内接する方形の面積の総和である．$[a,b]$ 上の連続関数 f に対し，上下のリーマン和

$$\sum\nolimits_a^b M(x,x+\Delta x)\Delta x, \qquad \sum\nolimits_a^b m(x,x+\Delta x)\Delta x \ \left(\Delta x=\frac{b-a}{n}\right)$$

は n の実関数であり，任意の正整数 n で定義される．関数の公理により，その自然拡大があらゆる正の超整数に対して定義される．H を正の無限大超整数とし，

$dx=\dfrac{b-a}{H}$ と置くとき，上下の有限リーマン和の自然拡大

$$\sum_a^b M(x, x+dx)dx, \qquad \sum_a^b m(x, x+dx)dx$$

をそれぞれ dx に関する a から b までの f の**無限上リーマン和**，**無限下リーマン和**と言う．

補題 1 上下の無限リーマン和は互いに無限に近い：

$$\sum_a^b m(x, x+dx)dx \approx \sum_a^b M(x, x+dx)dx.$$

証明 各正整数 n に対して $\varDelta x=\dfrac{b-a}{n}$ と置くと，明らかに

$$\sum_a^b m(x, x+\varDelta x)\varDelta x \leqslant \sum_a^b M(x, x+\varDelta x)\varDelta x$$

が成りたつから，解の公理によって

$$\sum_a^b m(x, x+dx)dx \leqslant \sum_a^b M(x, x+dx)dx$$

が成りたつ．任意の正実数 r に対して

$$\sum_a^b M(x, x+dx)dx < \sum_a^b m(x, x+dx)dx + r \tag{1}$$

が成りたつことを示せばよい．この証明は前節の定理 3 と同じ方法で行う．$c=\dfrac{r}{b-a}$ と置く．正整数 n に対して $\varDelta x=\dfrac{b-a}{n}$ とする．もしかりに

$$\sum_a^b M(x, x+\varDelta x)\varDelta x \geqslant \sum_a^b m(x, x+\varDelta x)\varDelta x + r$$

が成りたつとすると，少くとも一つの分点 x に対して

$$M(x, x+\varDelta x) \geqslant m(x, x+\varDelta x)+c$$

でなければならない．M, m の定義により，$[x, x+\varDelta x]$ の点 y, z が存在し，

$$M(x, x+\varDelta x)=f(y), \qquad m(x, x+\varDelta x)=f(z)$$

と書ける．したがって，式系（変数は $n, \varDelta x$）

$$\left.\begin{aligned} &n\in \boldsymbol{Z},\ 0<n,\ \varDelta x=\frac{b-a}{n}, \\ &\sum_a^b M(x, x+\varDelta x)\varDelta x \geqslant \sum_a^b m(x, x+\varDelta x)\varDelta x + r \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

の実解はすべて式系

$$(2),\ a\leqslant y\leqslant b,\ a\leqslant z\leqslant b,\ |y-z|\leqslant \varDelta x,\ f(y)\geqslant f(z)+c \tag{3}$$

の部分実解である．そこで n_1 を正の無限大超整数とし，$dx=\dfrac{b-a}{n_1}$ と置く．もし (1) が成りたたなければ，

$$\sum_a^b M(x, x+dx)dx \geqslant \sum_a^b m(x, x+dx)dx+r$$

だから，n_1, dx は (2) の超実解である．したがって，ある超実数 y_1, z_1 を取ると，n_1, dx, y_1, z_1 は (3) の超実解となる．特に，

$$y_1 \approx z_1, \qquad f(y_1) \not\approx f(z_1)$$

となり，f の一様連続性に反する．だから (1) が成りたたなければならない．⊣

定理 2　　f の面積関数は一つしかない．したがって定積分がその唯一つの面積関数である．

証明　　$A(u, v)$ および $B(u, v)$ が f の面積関数だとする．$a, b \in I$, $a<b$ とし，正整数 n に対して $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ と置く．方形性によって

$$m(x_k, x_{k+1})\Delta x \leqslant A(x_k, x_{k+1}) \leqslant M(x_k, x_{k+1})\Delta x \qquad (k=0, 1, \cdots, n-1)$$

が成りたち，加法性によって

$$\sum_a^b m(x, x+\Delta x)\Delta x \leqslant A(a, b) \leqslant \sum_a^b M(x, x+\Delta x)\Delta x$$

が成りたつ．そこで n_1 を正の無限大超整数とし，$dx=\dfrac{b-a}{n_1}$ と置く．解の公理によって

$$\sum_a^b m(x, x+dx)dx \leqslant A(a, b) \leqslant \sum_a^b M(x, x+dx)dx$$

が成りたち，まったく同様に

$$\sum_a^b m(x, x+dx)dx \leqslant B(a, b) \leqslant \sum_a^b M(x, x+dx)dx$$

が成りたつ．だから補題 1 によって

$$A(a, b) \approx B(a, b)$$

となるが，これらはともに実数だから等しくなければならない．さらに，

$$A(a, a)=B(a, a)=0,$$
$$A(b, a)=-A(a, b)=-B(a, b)=B(b, a)$$

も成りたつ．⊣

定義　　f の定義域が開区間 I だとする．I 上の関数 F の導関数が f であるとき，F は f の I 上の**原始関数**であると言う．

微積分の基本定理　$a, b \in I$, $a<b$ とする．F が f の原始関数なら，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

が成りたつ．

証明　$D(a,b) = F(b) - F(a)$ と置いて，D が f の面積関数であることを示せばよい．

加法性．$D(a,c) = F(c) - F(a) = (F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b))$

$$= D(a,b) + D(b,c).$$

方形性．平均値の定理により，開区間 (a,b) の点 c で，

$$f(c) = F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}$$

なるものがある．これを書きなおせば，

$$f(c)(b-a) = F(b) - F(a) = D(a,b)$$

となる．$[a,b]$ 上の f の最小値，最大値をそれぞれ m, M とすると，

$$m \leqq f(c) \leqq M,$$

$$\therefore \quad m(b-a) \leqq f(c)(b-a) \leqq M(b-a),$$

$$\therefore \quad m(b-a) \leqq D(a,b) \leqq M(b-a).$$

⊣

定理 3　f を開区間 I 上の関数とし，F を f の一つの原始関数とする．f の原始関数の全体は，F との差が定数であるような関数の全体に等しい．

証明　C_0 が定数なら，$F(x) + C_0$ は F と同じ導関数 f をもつから，f の原始関数である．逆に G が f の原始関数だとする．$H(x) = F(x) - G(x)$ が定数であることを示せばよい．まず，

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

平均値の定理により，任意の $a, b \in I$, $a<b$ に対し，(a,b) の点 c で

$$0 = H'(c) = \frac{H(b) - H(a)}{b-a}$$

なるものが存在する．だから $H(b) = H(a)$，すなわち H は定数関数である．⊣

定義　f の原始関数の全体を f の**不定積分**と言い，$\int f(x)dx$ と書く．

ある関数 F との差が定数であるような関数の全体を

$$F(x) + C$$

と書く．特に F が f の一つの原始関数ならば，定理 3 によって

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

が成りたつ.

不定積分の計算は標準的なやりかたとまったく同じである. また, 一つの原始関数を見つけて微積分の基本定理を使うと, 定積分が計算できる. しかし, 我々はまだ, 任意の連続関数が原始関数をもつことを証明していない. これはつぎの節でやる.

4 C　微積分の第二基本定理

定積分 $\int_u^w f(t)dt$ は, 二変数 $u, w\in I$ の実関数とみなすことができる. 関数の公理により, 超実数 $u, w\in I^*$ に対しても $\int_u^w f(t)dt$ が定義される.

微積分の第二基本定理　a を I の点とし, $x\in I$ に対して

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

と置く. このとき,

（i）F は I 上連続な関数である.

（ii）I の内部で F は f の原始関数である.

証明　（i）c を I の点, Δx を無限小とし, $c+\Delta x\in I^*$ なるものとする.

$$F(c+\Delta x)\approx F(c) \tag{1}$$

を示せばよい. $\Delta x>0$ の場合, b を I の点で $c<c+\Delta x<b$ なるものとする. $[c, b]$ 上の f の最小値, 最大値をそれぞれ m, M とする. $b-c$ より小さい正の実数 u に対し,

$$F(c+u)-F(c)=\int_c^{c+u} f(t)dt,$$

$$mu\leqslant\int_c^{c+u} f(t)dt\leqslant Mu$$

が成りたつから,

$$mu\leqslant F(c+u)-F(c)\leqslant Mu$$

となる. 解の公理により,

$$m\Delta x\leqslant F(c+\Delta x)-F(c)\leqslant M\Delta x$$

となり, (1) が成りたつ. $\Delta x<0$ の場合も同様である.

（ii） c を I の内部の点，$\varDelta x$ を0でない無限小とする．やはり $\varDelta x>0$ の場合を考える．I の点 b で，$c<c+\varDelta x<b$ なるものを取る．$b-c$ より小さい正の実数 u を考える．閉区間 $[c, c+u]$ 上の f の最小値を $f(y)$，最大値を $f(z)$ とすると，

$$F(c+u)-F(c)=\int_c^{c+u} f(t)dt,$$

$$f(y)u \leqslant \int_c^{c+u} f(t)dt \leqslant f(z)u$$

が成りたつから，式系

$$0<u<b-c \tag{2}$$

の実解はすべて式系

$$\left.\begin{array}{ll} c \leqslant y \leqslant c+u, & c \leqslant z \leqslant c+u, \\ f(y)u \leqslant F(c+u)-F(c) \leqslant f(z)u & \end{array}\right\} \tag{3}$$

の部分実解である．$u=\varDelta x$ は（2）の超実解だから，（3）の部分超実解である．したがって，超実数 y_1, z_1 を適当に取ると，

$$y_1 \approx c,\ \ z_1 \approx c,\ \ f(y_1)\varDelta x \leqslant F(c+\varDelta x)-F(c) \leqslant f(z_1)\varDelta x$$

が成りたつ．これから

$$f(y_1) \leqslant \frac{F(c+\varDelta x)-F(c)}{\varDelta x} \leqslant f(z_1)$$

が得られる．f の連続性により，

$$f(c)=st(f(y_1)) \leqslant st\left(\frac{F(c+\varDelta x)-F(c)}{\varDelta x}\right) \leqslant st(f(z_1))=f(c),$$

$$\therefore\quad f(c)=st\left(\frac{F(c+\varDelta x)-F(c)}{\varDelta x}\right).$$

$\varDelta x<0$ の場合も同様に上の式が成りたつ．すなわち $f(c)=F'(c)$ である． ⊣

この証明には第一基本定理や面積関数の一意性は使われていない．そして，第二基本定理から，第一基本定理の別証明が得られる．その証明にも面積関数の一意性はいらない．

微積分の基本定理の別証明　G を f の一つの原始関数とする．二つの原始関数の差は定数だから，

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt+C_0$$

と書ける．C_0 は定数である．これから，

$$G(b)-G(a)=\left(\int_a^b f(t)dt+C_0\right)-\left(\int_a^a f(t)dt+C_0\right)=\int_a^b f(t)dt$$

が出る. ⊣

4 D 不定積分の方法

基本的な関数の原始関数および不定積分を求める基本的な方法を列挙する. しかし, 比較的簡単な関数でも, その不定積分は我々の知っている関数の範囲を出てしまうことがあることを知るべきである. たとえば,

$$\int e^{-x^2}dx \quad や \quad \int\sqrt{1-x^4}dx$$

は, 我々の知っている関数の組合せとしては表わされない.

基本公式

（1） $\int x^r dx=\frac{x^{r+1}}{r+1}+C \quad (r\neq -1)$　　（2） $\int\frac{dx}{x}=\log|x|+C$

（3） $\int e^x dx=e^x+C$　　（4） $\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$

（5） $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$　　（6） $\int\cos x\,dx=\sin x+C$

（7） $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$　　（8） $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$

（9） $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+C$　　(10) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\log(x+\sqrt{1+x^2})+C$

(11) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\log(x+\sqrt{x^2-1})+C$

(12) $\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+C$

(13) $\int\sqrt{x^2-1}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1}-\log|x+\sqrt{x^2-1}|)+C$

(14) $\int\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1}))+C$

(15) $\int\tan x\,dx=-\log|\cos x|+C$

これらの公式は右辺を微分すれば得られる.

線型性

$$\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx, \qquad \int cf(x)dx=c\int f(x)dx$$

置換積分　$\int f(x)dx$ において，$x=g(t)$ とすれば $dx=g'(t)dt$,

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt.$$

これは節 12 D 定理 1 によって成りたつ．両辺を t で微分しても分る．

例 1　(a)　$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.　$u=\sqrt{x}$ とおくと $du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$,　$dx=2u\,du$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\int \frac{2u}{u+1}du=\int \frac{2u+2}{u+1}du-\int \frac{2}{u+1}du=2u-2\log|u+1|+C$$
$$=2\sqrt{x}-2\log(\sqrt{x}+1)+C.$$

(b)　基本公式 (12) を証明してみよう．$x=\sin t$ と置く．$dx=\cos t\,dt$,　$\sqrt{1-x^2}=\cos t$,　$\int \sqrt{1-x^2}dx=\int \cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int(\cos 2t+1)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+t\right)+C$

$$=\frac{1}{2}(\sin t\cos t+t)+C=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+C.$$

部分積分

$$\int f(x)g(x)dx=f(x)\int g(x)dx-\int\left(f'(x)\int g(x)dx\right)dx.$$

これは $f(x)\int g(x)dx$ を微分すれば出る．

例 2　(a)　$\int \log x\,dx=\int(\log x)\cdot 1dx=x\log x-\int \frac{1}{x}xdx=x(\log x-1)+C.$

(b)　$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\cdot\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx$
$-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$　　$\therefore$　$\int e^{ax}\cos bx\,dx$

$$=\frac{\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx}{1+\frac{b^2}{a^2}}+C=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C.$$

有理関数の不定積分

有理関数 $f(x)=\frac{F(x)}{G(x)}$ ($F(x)$, $G(x)$ は多項式) は，まず

$$\frac{F(x)}{G(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{G(x)}$$

の形になる．ただし，$Q(x)$ は多項式，$R(x)$ は $G(x)$ より次数の低い多項式で

ある．$G(x)$ は一次式および二次式の積に分解できる．もちろんこの分解は実行できるとは限らない．$G(x)$ の因子に $(x-a)^m$ があれば，$\dfrac{R(x)}{G(x)}$ は

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-a)^m}$$

の形の部分を含む．$G(x)$ の因子に $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m$ $(\beta\neq 0)$ があれば，$\dfrac{R(x)}{G(x)}$ は

$$\frac{B_1x+C_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{B_2x+C_2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2}+\cdots+\frac{B_mx+C_m}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}$$

の形の部分を含む．$\dfrac{R(x)}{G(x)}$ はこれらの形の分数式だけの和として書ける．これを**部分分数展開**と言う．証明は省略する．さて，一次式の巾の部分は，

$$\int\frac{dx}{x-a}=\log|x-a|+C,\qquad \int\frac{dx}{(x-a)^n}=-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C\quad (n\neq 1)$$

として積分できる．二次式の部分の積分は $t=\dfrac{x-\alpha}{\beta}$ と置くことにより，

$$\int\frac{t}{(t^2+1)^n}dt\quad \text{および}\quad \int\frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

に帰着する．はじめの積分は

$$\int\frac{t}{(t^2+1)^n}dt=-\frac{1}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}+C$$

でよい．あとの方は $n=1$ なら $\arctan t+C$ となるから，n に関する帰納法によることにし，$n-1$ の場合に帰着させればよい．実際，

$$\begin{aligned}
I_n&=\int\frac{dt}{(t^2+1)^n}=\int\frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^n}dt=I_{n-1}-\int t\cdot\frac{t}{(t^2+1)^n}dt\\
&=I_{n-1}+\frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}}\\
&=\frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}+\left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right)I_{n-1}
\end{aligned}$$

となる．

結局，有理関数の不定積分は，有理関数，対数関数および $\arctan x$ の組合せの範囲で（原理的には）得られる．

例 3　（1）　$\dfrac{x^3+2x^2-20x-33}{x^2-3x-10}=x+5+\dfrac{5x+17}{x^2-3x-10}=x+5+\dfrac{-1}{x+2}+\dfrac{6}{x-5}.$

$$\int\frac{x^3+2x^2-20x-33}{x^2-3x-10}dx=\frac{x^2}{2}+5x-\log|x+2|+6\log|x-5|+C$$

$$=\frac{x^2}{2}+5x+\log\frac{|x-5|^6}{|x+2|}+C.$$

（2）$\dfrac{x^2}{x^3+3x^2+3x+1}=\dfrac{x^2}{(x+1)^3}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^3}$

$$\int\frac{x^2}{x^3+3x^2+3x+1}dx=\log|x+1|+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+C.$$

（3）$\dfrac{2x+3}{x^2+x+1}=\dfrac{2x+3}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$.　$u=x+\dfrac{1}{2}$ と置く.

$$\int\frac{2x+3}{x^2+x+1}dx=\int\frac{2u+2}{u^2+\frac{3}{4}}du=\int\frac{2u}{u^2+\frac{3}{4}}du+\int\frac{2}{u^2+\frac{3}{4}}du$$

$$=\int\frac{d\left(u^2+\frac{3}{4}\right)}{u^2+\frac{3}{4}}+2\int\frac{1}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du=\log\left(u^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u\right)+C$$

$$=\log(x^2+x+1)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

有理関数の積分に帰着できる不定積分

$R(x,y)$ を二変数 x,y の有理関数とする.

（1）$\displaystyle\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$.　$t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ と置くと，$x=\dfrac{-b+dt^n}{a-ct^n}$，$dx=g(t)dt$

（$g(t)$ は t の有理関数）となるから，有理関数の積分になる.

（2）$\displaystyle\int R(x,\sqrt{ax^2+2bx+c})dx$，$a>0$，$ac>b^2$ のときは $t=\sqrt{ax^2+2bx+c}+$

$+\sqrt{a}\,x$ と置くと，$x=\dfrac{t^2-c}{2(b+\sqrt{a}\,t)}$，$\sqrt{ax^2+2bx+c}=t-\dfrac{\sqrt{a}\,(t^2-c)}{2(b+\sqrt{a}\,t)}$，

$dx=g(t)dt$（$g(t)$ は t の有理関数）となる.

$ac<b^2$ のときは $ax^2+2bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$，$\alpha\neq\beta$ となる.

$t=\sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$ と置けばよい（確かめよ）.

（3）$\displaystyle\int R(\cos x,\sin x)dx$. $t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置くと，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，

$dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$ となる.

これらの方法は常に最良のものとは限らない.

練習問題 4D

つぎの関数の不定積分を求めよ.

(1) $(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}$　(2) xe^{-x}　(3) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$　(4) $x^{-2}e^{\frac{1}{x}}$　(5) $\dfrac{\log x}{x^3}$

(6) $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$　(7) $x^2\sqrt{x-3}$　(8) $x\tan^2 x$　(9) $\log(x^2+x^3)$

(10) x^2e^x　(11) $\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$　(12) $\dfrac{2^x}{2^x+1}$　(13) $\sin\sqrt{x}$

(14) $\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$　(15) $\dfrac{1}{x^3-x}$　(16) $\dfrac{1}{x^3+x}$　(17) $\dfrac{1}{(1+x^2)(2+x^2)}$

(18) $\dfrac{\arctan x}{x^2}$　(19) $x^2\arctan x$　(20) $x^3e^{x^2}$　(21) $\arctan\sqrt{x}$

(22) $\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x^2}$　(23) $\log(1+x^2)$

5 極　　限

5A 同値性定理

極限，連続性，一様連続性の無限小を使った定義が，標準的な ε-δ 式定義と同値であることを示す．これらの同値性定理はあとで役に立つ．

定理 1　f を実関数，c を実数とする．つぎの三条件は互いに同値である：

（i）$\lim_{x \to c} f(x) = L$．すなわち $x \approx c$, $x \neq c$ なら $f(x) \approx L$.

（ii）ある正の超実数 δ を取ると，$0 < |x-c| < \delta$ なら $f(x) \approx L$.

（iii）ε-δ 条件： 任意の正実数 ε に対してある正実数 δ を取ると，x が実数で $0 < |x-c| < \delta$ をみたせば $|f(x)-L| < \varepsilon$ をみたす．

証明　(i) ⇒ (ii)　δ を無限小に取れば明らか．

(ii) ⇒ (iii)　(iii) を否定する．ある正実数 ε を取ると，どんな正実数 δ も，式系

$$0 < |x-c| < \delta, \qquad |f(x)-L| \geqq \varepsilon \tag{1}$$

の部分実解である．そこで δ_1 を任意の正の超実数とする．部分解定理により，(1) をみたすような超実数 x_1 が存在する．この x_1 について，

$$0 < |x_1 - c| < \delta_1, \qquad f(x_1) \not\approx L$$

が成りたつ．これは条件 (ii) に反する．

(iii) ⇒ (i)　$x_1 \approx c$, $x_1 \neq c$ とする．ε を任意の正実数とし，これに対して ε-δ 条件をみたす正実数 δ を取る．すると，式系

$$0 < |x-c| < \delta$$

の実解はすべて式

$$|f(x)-L| < \varepsilon$$

の解である．いま超実数 x_1 は $0 < |x_1 - c| < \delta$ の解だから $|f(x_1)-L| < \varepsilon$ をみたす．ε は任意の正実数だから $f(x_1) \approx L$ となる．　⊣

上の条件 (ii) は見かけは (i) より弱く，確かめやすいことが多い．

系 2　つぎの三条件は互いに同値である：

（i）f は c で連続である．すなわち，$x\approx c$ なら $f(x)\approx f(c)$.

（ii）ある正の超実数 δ を取ると，$|x-c|<\delta$ なら $f(x)\approx f(c)$.

（iii）ε-δ 条件：任意の正実数 ε に対し，ある正実数 δ を取ると，実数 x が $|x-c|<\delta$ をみたせば $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$ をみたす．

系 3　つぎの三条件は互いに同値である：

（i）$f'(c)=S$. すなわち，0 でない無限小超実数 $\varDelta x$ に対して

$$\frac{f(c+\varDelta x)-f(c)}{\varDelta x}\approx S.$$

（ii）ある正の超実数 $\delta>0$ を取ると，$0<|\varDelta x|<\delta$ なる超実数 $\varDelta x$ に対して

$$\frac{f(c+\varDelta x)-f(c)}{\varDelta x}\approx S.$$

（iii）ε-δ 条件：任意の正実数 ε に対してある正実数 δ を取ると，$0<|\varDelta x|<\delta$ なる実数 $\varDelta x$ に対して

$$\left|\frac{f(c+\varDelta x)-f(c)}{\varDelta x}-S\right|<\varepsilon.$$

つぎに，定理 1 および系 2 を，$\boldsymbol{R}$ の部分集合 Y に制限したものを証明ぬきで述べる．

定理 1′　Y を $\boldsymbol{R}$ の部分集合，c を Y の点とする．つぎの三条件は互いに同値である：

（i）$\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x\in Y}} f(x)=L$. すなわち，$x\in Y^*$，$x\approx c$，$x\neq c$ なら $f(x)\approx L$.

（ii）ある正の超実数 δ を取ると，Y^* の点 x が $0<|x-c|<\delta$ をみたせば $f(x)\approx L$ をみたす．

（iii）ε-δ 条件：任意の正実数 ε に対してある正実数 δ を取ると，Y の点 x が $0<|x-c|<\delta$ をみたせば $|f(x)-L|<\varepsilon$ をみたす．

系 2′　つぎの三条件は互いに同値である：

（i）f は Y 上連続である．すなわち，$c\in Y$，$x\in Y^*$，$x\approx c$ なら $f(x)\approx f(c)$.

（ii）Y の各点 c に対し，ある正の超実数 δ を取ると，Y^* の点 x が $|x-c|<\delta$ をみたせば $f(x)\approx f(c)$ をみたす．

（iii）ε-δ 条件：任意の正実数 ε および Y の点 c に対し，ある正実数 δ を取

ると，Y の点 x が $|x-c|<\delta$ をみたすかぎり $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$ をみたす．

つぎに一様連続性に関する同値性定理を証明する．

定理 4　つぎの三条件は互いに同値である：

（i）f は Y 上一様連続である．すなわち，$x, y\in Y^*$, $x\approx y$ なら $f(x)\approx f(y)$.

（ii）ある正の超実数 δ を取ると，Y^* の点 x, y が $|x-y|<\delta$ をみたせば $f(x)\approx f(y)$ をみたす．

（iii）ε-δ 条件：任意の正実数 ε に対してある正実数 δ を取ると，Y の点 x, y が $|x-y|<\delta$ をみたすかぎり $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ をみたす．

証明　(i) ⇒ (ii)　δ を無限小に取れば明らか．

(ii) ⇒ (iii)　(iii) が成りたたないとする．ある正実数 ε を取ると，あらゆる正実数 δ は，式系

$$x\in Y,\ y\in Y,\ |x-y|<\delta,\ |f(x)-f(y)|\geqq\varepsilon \qquad (2)$$

の部分実解である．したがって，任意の正超実数 δ_1 は (2) の部分超実解である．すなわち Y^* の点 x_1, y_1 で，$|x_1-y_1|<\delta_1$ かつ $|f(x_1)-f(y_1)|\geqq\varepsilon$ なるものが存在する．したがって (ii) は成りたたない．

(iii) ⇒ (i)　$x_1, y_1\in Y^*$, $x_1\approx y_1$ とする．ε を任意の正実数とし，それに対して ε-δ 条件をみたす正実数 δ を取る．すると，式系

$$x\in Y,\ y\in Y,\ |x-y|<\delta \qquad (3)$$

の実解はすべて式

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon \qquad (4)$$

の解である．いま x_1, y_1 は (3) の超実解だから (4) の解でもある．ε は任意の正実数だったから $f(x_1)\approx f(y_1)$ でなければならない．　⊣

最後に，変数または関数が無限大に近づくときの極限について論じる．

定義　任意の正の無限大超実数 H に対して $f(H)\approx L$ となるとき，

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

と書く．また，$x\approx c$, $x\neq c$ なる任意の超実数 x に対して $f(x)$ が正の無限大であるとき，

$$\lim_{x\to c} f(x)=\infty$$

と書く．

定理 5　つぎの三条件は互いに同値である：

（i）$\lim_{x\to\infty} f(x)=L.$

（ii）ある超実数 K を取ると，任意の $H>K$ に対して $f(H)\approx L$ となる．

（iii）ε-δ 条件：任意の正実数 ε に対してある実数 M を取ると，実数 x が $x>M$ なるかぎり $|f(x)-L|<\varepsilon$ となる．

定理 6　つぎの三条件は互いに同値である：

（i）$\lim_{x\to c} f(x)=\infty$

（ii）ある正の超実数 δ を取ると，$0<|x-c|<\delta$ なるかぎり $f(x)$ は正の無限大である．

（iii）M-δ 条件：任意の実数 M に対してある正実数 δ を取ると，実数 x が $0<|x-c|<\delta$ をみたすかぎり $f(x)>M$ をみたす．

負の無限大の場合の極限，ある部分集合 Y に制限したときの無限大極限，$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ の形の極限も同様に定義され，同じような同値性定理が成りたつ．

例　$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \quad (n\geqq 1,\ a_n\neq 0)$$
を一次以上の多項式とする．$a_n>0$ なら
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$
が成りたつ．実際，$f(x)$ をつぎのように書きなおす；
$$f(x)=x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right).$$
x が無限大超実数なら，カッコの中の第二項以下はすべて無限小であり，したがってカッコの中は a_n に無限に近い．x^n は無限大だから $f(x)$ も無限大である．定義によって $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ となる．

練習問題 5A

1.　上の例にならって $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ．

2.　$f(x)>0$ ならば，$\lim_{x\to c} f(x)=\infty$ は $\lim_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}=0$ と同値であることを示せ．

3.　$x\to\infty$ のとき，つぎの関数の極限値を求めよ．

（1）$\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3x+1}}$　　（2）$\sqrt[3]{x^3+1}-x$　　（3）$(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x})x^{\frac{3}{4}}$

（4）$\dfrac{\sin x}{x}$　（5）$\arctan x$　（6）e^x　（7）$\log x$

5B　ド・ロピタルの規則

まず一般平均値定理を証明し，それを使ってド・ロピタルの規則を証明する．

一般平均値定理　関数 f, g は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能とする．さらに，(a, b) の各点 x で $g'(x) \neq 0$ とする．このとき，(a, b) の点 t で，

$$\frac{f'(t)}{g'(t)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

となるものが存在する．

証明　$h(x)=(g(b)-g(a))f(x)-(f(b)-f(a))g(x)$ に平均値の定理を適用すればよい．　⊣

$\dfrac{0}{0}$ の形のド・ロピタルの規則　開区間 (c, b) のあらゆる点 x で $f'(x)$ および $g'(x)$ が存在し，$g'(x) \neq 0$ とする．さらに，

$$\lim_{x \to c^+} f(x)=0, \qquad \lim_{x \to c^+} g(x)=0$$

と仮定する．もし $\displaystyle\lim_{x \to c^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば，

$$\lim_{x \to c^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to c^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成りたつ．

証明　$L=\displaystyle\lim_{x \to c^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ と置く．$f(c)=g(c)=0$ と置きなおすことにより，f も g も区間 $[c, b)$ で連続としてよい．一般平均値定理により，式系

$$c<x<b \tag{1}$$

の任意の実解 x は式系

$$c<t<x, \qquad \frac{f'(x)}{g'(t)}=\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}$$

の部分実解，これを書きなおせば，式系

$$c<t<x, \qquad \frac{f'(t)}{g'(t)}=\frac{f(x)}{g(x)} \tag{2}$$

の部分実解である．そこで $x_1 \approx c$，$x_1 > c$ とする．部分解定理により，ある超実数 t_1 に対して (2) が成りたつ．すなわち，

$$t_1 \approx c,\quad t_1 > c,\quad \frac{f'(t_1)}{g'(t_1)} = \frac{f(x_1)}{g(x_1)}.$$

$L = \lim\limits_{t \to c^+} \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$ だから，

$$L \approx \frac{f'(t_1)}{g'(t_1)} = \frac{f(x_1)}{g(x_1)}.$$

したがって $L = \lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ となる．　⊣

ド・ロピタルの規則は，c および L の一方または両方が ∞ または $-\infty$ である場合や，$x \to c^-$ の場合，$x \to c$ の場合にも成りたつ．その証明は，上の証明をいつものようにちょっと変えるだけでできる．しかし，$\dfrac{\infty}{\infty}$ の形のド・ロピタルの規則はそう簡単には行かない．

例 1　(1)　$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{-1}-1}{\sqrt{x}-1}$．これは $\dfrac{0}{0}$ の形である．したがって，

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{-1}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{-x^{-2}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = 2.$$

(2)　$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-\frac{1}{x}}{x}$．これは $\dfrac{0}{1}$ の形だから，ド・ロピタルの規則は適用できない．これに気付かずに適用すると，

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+x^{-2}}{1} = \frac{3}{2}$$

となって誤答になる．

(3)　$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$，これは $\dfrac{0}{0}$ の形だから，

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

(4)　$\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\arctan x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{x^{-1}}$．これは $\dfrac{0}{0}$ の形だから，

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-x^{-2}} = \lim_{x \to \infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = -\lim_{x \to \infty}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) = -1.$$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ の形のド・ロピタルの規則　開区間 (c, b) のあらゆる点 x で $f'(x)$ および $g'(x)$ が存在し，$g'(x) \neq 0$ とする．さらに，

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to c^+} g(x)=\infty$$

と仮定する．もし $\lim_{x\to c^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば，

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成りたつ．

証明　極限に対する同値性定理（節5A，定理1）を使う．$L=\lim_{x\to c^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ と置く．一般平均値定理により，式系

$$c<x<y<c+r \tag{3}$$

の実解はすべて式系

$$x<t<y, \qquad \frac{f'(t)}{g'(t)}=\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}$$

の部分実解，これを書きかえると，式系

$$x<t<y, \qquad \frac{f'(t)}{g'(t)}=\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(y)}{g(x)}}{1-\dfrac{g(y)}{g(x)}}$$

の部分実解である．そこで $y_1\approx c$，$y_1>c$ とする．仮定によって $f(y_1)$ も $g(y_1)$ も正の無限大超実数だから，その積 $K=f(y_1)g(y_1)$ も正の無限大である．ここで $\lim_{x\to c^+} g(x)=\infty$ に対する M-δ 条件を使う：任意の実数 M に対し，ある実数 $\delta(M)$ を取ると，式系

$$c<x<c+\delta(M)$$

の実解はすべて式 $g(x)>M$ の解である．そこで

$$0<\delta_1\leqslant\delta(K), \qquad c+\delta_1<y_1$$

なる超実数 δ_1 を取る．x_1 を $c<x_1<c+\delta_1$ なる任意の超実数とすると，解の公理によって $g(x_1)>K$ が成りたつ．さらに，

$$c<x_1<y_1<c+r$$

だから，部分解定理により，(4) を成立させるような t_1 が存在する：

$$x_1<t_1<y_1, \qquad \frac{f'(t_1)}{g'(t_1)}=\frac{\dfrac{f(x_1)}{g(x_1)}-\dfrac{f(y_1)}{g(x_1)}}{1-\dfrac{g(y_1)}{g(x_1)}}. \tag{4'}$$

したがって

$$t_1 \approx c, \qquad \frac{f'(t_1)}{g'(t_1)} \approx L$$

であり，一方

$$\left|\frac{f(y_1)}{g(x_1)}\right| \leqslant \left|\frac{f(y_1)}{K}\right| = \left|\frac{f(y_1)}{f(y_1)g(y_1)}\right| \approx 0.$$

$$\therefore \quad \frac{f(y_1)}{g(x_1)} \approx 0. \text{ 同様に } \quad \frac{g(y_1)}{g(x_1)} \approx 0.$$

そこで (4′) の第二式の両辺の標準部分を取ると，

$$st\left(\frac{f'(t_1)}{g'(t_1)}\right) = st\left[\frac{\dfrac{f(x_1)}{g(x_1)} - \dfrac{f(y_1)}{g(x_1)}}{1 - \dfrac{g(y_1)}{g(x_1)}}\right] = \frac{st\left[\dfrac{f(x_1)}{g(x_1)}\right] - 0}{1-0} = st\left(\frac{f(x_1)}{g(x_1)}\right)$$

となるから，

$$L \approx \frac{f'(t_1)}{g'(t_1)} \approx \frac{f(x_1)}{g(x_1)}$$

を得る．これは c と $c+\delta_1$ の間にある任意の x_1 に対して成りたつから，極限に対する同値性定理 (節 5 A，定理 1) によって

$$L = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

が成りたつ．　⊣

例 2　$\displaystyle \lim_{x \to 0} x \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{x^{-1}}$. これは $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形だから，

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos^{-2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{-x^{-2}} = -\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-2} = -1.$$

例 3　(1)　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n}$　$(n \in N)$.　これは $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形であり，$n-1$ 回微分するまではずっと $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形である．n 回微分すると，

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{n!} = \infty.$$

すなわち，e^x の方が，どんな多項式よりも速く大きくなる．言いかえると，任意の正の無限大超実数 x に対して $x^n e^{-x}$ は無限小になる；

$$\lim_{x \to \infty} x^n e^{-x} = 0.$$

(2)　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^n}$.　これも $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形だから，

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^{-1}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{nx^n} = 0.$$

すなわち，$\log x$ の大きくなる速さは x よりおそい．さらに強く，任意の正実数 α に対して $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x^\alpha}=0$ となる．実際，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$

練 習 問 題 5B

1. つぎの極限値を求めよ．

（1） $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}}$ （2） $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$ （3） $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$

（4） $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\sin x}$ （5） $\lim_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}$ （6） $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x}$ （7） $\lim_{x\to 0^+}x^n e^{\frac{1}{x}}$

（8） $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}$ （9） $\lim_{x\to 1}\dfrac{\log x}{x-1}$ (10) $\lim_{x\to 0^+}x\log x$ (11) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x\log x}{x^2-1}$

(12) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(x^2+1)}{x}$

2. つぎの極限が有限値をもつような a の値を定め，極限値を求めよ．

（1） $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-ax^2}{x^3}$ （2） $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x-ax^2}{x^3}$

6 積分の応用

6A 無限和定理

これから紹介する無限和定理を使うと，ある量が与えられた関数の定積分に等しいかどうかが簡単に，しかも効果的に計算できる．この方法によって，幾何や物理へ積分を応用するいろいろの有名な例を根拠づけることができる．それは，積分公式を無限小の総和と考える直観的やりかたにほかならない．

第2章の定義の復習： 0でない無限小 Δx に対し，

$$u \approx v \quad (\Delta x \text{ に比べて})$$

とは，

$$\frac{u}{\Delta x} \approx \frac{v}{\Delta x}$$

のことであった．

無限和定理　つぎの状況を想定する：

(i) h は区間 $[a, b]$ 上の連続実関数である．

(ii) $B(u, v)$ はつぎのような加法性をもつ実関数である： $u, v, w \in [a, b]$, $u < v < w$ に対し，

$$B(u, w) = B(u, v) + B(v, w).$$

(iii) 超実区間 $[a, b]^*$ の任意の無限小部分区間 $[x, x+\Delta x]^*$ に対し，

$$B(x, x+\Delta x) \approx h(x)\Delta x \qquad (\Delta x \text{ に比べて}).$$

このとき，

$$B(a, b) = \int_a^b h(x)\,dx$$

が成りたつ．

我々はこのとき，

$$\Delta B = B(x, x+\Delta x)$$

と書くことにする．この定理は直観的にはつぎのことを言っている： もし各無限

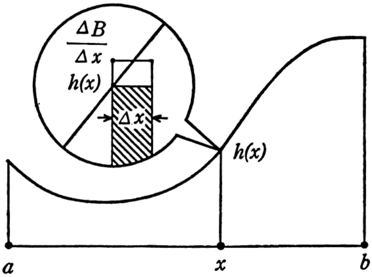


図 13

小 ΔB が Δx に比べて $h(x)\Delta x$ に無限に近ければ，これら ΔB すべての和 $B(a,b)$ はリーマン和 $\sum_a^b h(x)\Delta x$ に無限に近い．

証明　正の無限大超整数 n_1 を取って $\Delta x_1 = \frac{b-a}{n_1}$ と置く．任意の正の実数 r に対して

$$\sum_a^b (h(x)-r)\Delta x_1 < B(a,b) < \sum_a^b (h(x)+r)\Delta x_1$$

が成りたつことを示せばよい．実際，もしこれが分れば，

$$\sum_a^b h(x)\Delta x_1 - r(b-a) < B(a,b) < \sum_a^b h(x)\Delta x_1 + r(b-a),$$

$$\therefore\quad \sum_a^b h(x)\Delta x_1 \approx B(a,b), \qquad \therefore\quad \int_a^b h(x)dx = B(a,b)$$

となる．

正整数 n を取って $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ と置く．B の加法性により，

$$B(a,b) = \sum_a^b B(x, x+\Delta x)$$

が成りたつ．したがって，式系

$$n \in \boldsymbol{Z},\ 0<n,\ \Delta x = \frac{b-a}{n},\quad B(a,b) \geqslant \sum_a^b (h(x)+r)\Delta x \tag{1}$$

の実解はすべて式系

$$a \leqslant x < x+\Delta x \leqslant b,\ B(x, x+\Delta x) \geqslant (h(x)+r)\Delta x \tag{2}$$

の部分実解である．(2) を書きなおすと，

$$a \leqslant x < x+\Delta x \leqslant b,\ \frac{B(x, x+\Delta x)}{\Delta x} \geqslant h(x)+r \tag{3}$$

となる．仮定（iii）により，(3) をみたすような超実数の組 $x_1, \Delta x_1$ は存在しない．だから，部分解定理によって (1) をみたすような $n_1, \Delta x_1$ も存在しない．し

たがって

$$B(a,b)\leqslant\sum_a^b(h(x)+r)\varDelta x_1$$

が成りたつ．まったく同様に

$$\sum_a^b(h(x)-r)\varDelta x_1<B(a,b)$$

も成りたつ．　⊣

無限和定理は，定積分が f の唯一つの面積関数だという節 4 B 定理 2 の精密化である．これの使いかたの最初の例として，面積関数の一意性の別証明をしてみよう．

定理（節 4 B 定理 2）　$[a,b]$ 上連続な関数 f の面積関数は高々一つしかない．

別証明　f の任意の面積関数 $B(u,v)$ に対し，

$$B(a,b)=\int_a^b f(x)dx$$

となることを示す．仮定によって $B(u,v)$ は加法性をもつ．つぎに $[a,b]^*$ の無限小部分区間 $[x,x+\varDelta x]^*$ を考える．超実最大最小値定理により，f は区間 $[x,x+\varDelta x]^*$ で最大値 M および最小値 m をもつ．B の方形性および解の公理により，

$$m\varDelta x\leqslant\varDelta B\leqslant M\varDelta x,$$

$$m\leqslant\frac{\varDelta B}{\varDelta x}\leqslant M$$

が成りたつ．f は連続だから $m\approx f(x)\approx M$ であり，したがって

$$f(x)\approx\frac{\varDelta B}{\varDelta x}\quad\text{すなわち}$$

$$f(x)\varDelta x\approx\varDelta B\quad(\varDelta x\text{ に比べて})$$

となる．だから，無限和定理によって

$$B(a,b)=\int_a^b f(x)dx$$

が成りたつ．　⊣

無限和定理は，積分の直観的概念をうまく定義する仕方が一通りしかないことを示すのに役立ち，また正しい積分公式を発見するためにも役立つ．

つぎに領域の面積を考える．

定義 つぎの形の集合を (x, y) 平面の**初等領域**と言う：

$$\{(x, y)\in \boldsymbol{R}^2;\ a\leqslant x\leqslant b,\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}.$$

ただし a, b は実数，f, g は $[a, b]$ 上の連続関数で各点 x で $f(x)\leqslant g(x)$ なるものである．これを特定するときは，$[a, b]$ **上の** f **と** g **との間の領域**と言う．積分

$$A=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$$

をこの領域の**面積**と言う．

正当化 $[u, v]$ 上の f と g との間の領域の面積という直観的な量を $A(u, v)$ で表わし，これにつぎの三つの性質を仮定するだけで上の公式を証明する：

(a) $A(u, v)$ は加法性をもつ． (4)

(b) 単調性：D, E が初等領域で $D\subseteq E$ ならば，D の面積は E の面積を越えない． (5)

(c) 軸に平行な方形の面積は底辺の長さと高さとの積である． (6)

さて，$[a, b]^*$ の無限小部分区間 $[x, x+\Delta x]^*$ を考える．$[x, x+\Delta x]^*$ 上の超実領域に (5) と (6) を使う．$[x, x+\Delta x]^*$ 上の f と g との間の領域の面積は $\Delta A=A(x, x+\Delta x)$ である．超実最大最小値定理により，f, g は $[x, x+\Delta x]^*$ 上でそれぞれ最大値 $f_{\max}, g_{\max}$ および最小値 $f_{\min}, g_{\min}$ をもつ．高さ $g_{\min}-f_{\max}$ の方形は帯領域 ΔA に内接し，高さ $g_{\max}-f_{\min}$ の方形は ΔA に外接する．両方とも幅は Δx である．

(5) と (6) により，

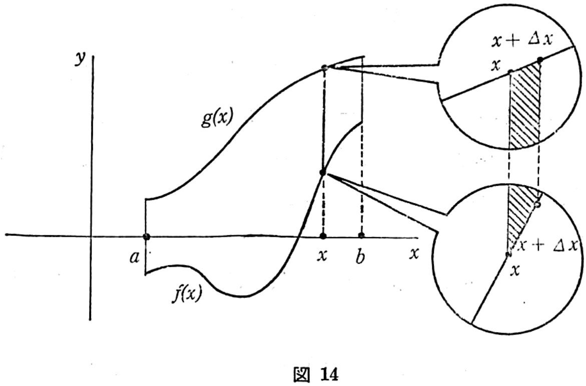


図 14

$$(g_{\min}-f_{\max})\varDelta x \leqq \varDelta A \leqq (g_{\max}-f_{\min})\varDelta x,$$

$$g_{\min}-f_{\max} \leqq \frac{\varDelta A}{\varDelta x} \leqq g_{\max}-f_{\min}$$

が成りたつ. f も g も連続だから,

$$f_{\min}\approx f(x)\approx f_{\max}, \qquad g_{\min}\approx g(x)\approx g_{\max}$$

である. したがって,

$$g_{\min}-f_{\max}\approx g(x)-f(x)\approx g_{\max}-f_{\min},$$

$$\therefore \quad \frac{\varDelta A}{\varDelta x}\approx g(x)-f(x),$$

$$\therefore \quad \varDelta A\approx (g(x)-f(x))\varDelta x \quad (\varDelta x \text{ に比べて}).$$

無限和定理によって

$$A(a,b)=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$$

となる. ⊣

つぎに, 無限和定理を使って回転体の体積公式を正当化する.

定義　D をつぎの形の初等領域とする:

$$D=\{(x,y)\ ;\ a\leqq x\leqq b,\ 0\leqq y\leqq g(x)\}.$$

(i) 積分

$$V=\int_a^b \pi(g(x))^2 dx$$

を, x 軸のまわりに D を回転させて得られる立体の**体積**と言う.

(ii) a, b が同符号のとき, 積分

$$V=\int_a^b 2\pi x g(x)dx$$

を, y 軸のまわりに D を回転させて得られる立体の体積と言う.

正当化　(i) 薄い円板のイメージで考える. $[u, w]$ 上の 0 と g の間の領域を, x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積（直観的概念）を $V(u, w)$ とする. これに関してつぎの三つの性質を仮定する:

(a) $V(u, w)$ は加法性をもつ. (7)

(b) 単調性: S, T が回転体で $S\subseteq T$ ならば, S の体積は T の体積を超えない. (8)

(c) 底面の半径が r で, 厚さ（高さ）が h の直円板（直円柱）の体積は $\pi r^2 h$

である． (9)

さて，$[a, b]^*$ の無限小部分区間 $[x, x+\varDelta x]^*$ 上の領域の回転体に対して (8) と (9) を使う．$[x, x+\varDelta x]^*$ 上の 0 と g との間の領域を回転すると，厚さ無限小の円板ができる．その体積を $\varDelta V$ とする．$[x, x+\varDelta x]^*$ 上の g の最大値を M，最小値を m とする．すると，半径 m の直円板が $\varDelta V$ に内接し，半径 M の直円板が $\varDelta V$ に外接する．どっちも厚さは $\varDelta x$ である．(8) と (9) により，

$$\pi m^2\varDelta x \leqq \varDelta V \leqq \pi M^2 \varDelta x.$$

g は連続だから $m \approx g(x) \approx M$，したがって

$$\varDelta V \approx \pi(g(x))^2\varDelta x \quad (\varDelta x \text{ に比べて})$$

となる．だから無限和定理によって

$$V(a, b) = \int_a^{b*} \pi(g(x))^2 dx$$

が成りたつ．

（ii） 今度は薄い円筒（中空の）のイメージで考える．$[u, w]$ 上の 0 と g との間の領域を，y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積（直観的概念）を $V(u, w)$ とする．$V(u, w)$ についても三つの性質 (7), (8), (9) を仮定する．$[x, x+\varDelta x]^*$ 上の 0 と g との間の領域を回転すると，厚さ無限小の円筒ができる．その体積を $\varDelta V$ とする．(7) と (9) により，これに内接，外接する直円筒の体積はそれぞれ

$$\pi(x+\varDelta x)^2 m - \pi x^2 m = \pi(2x+\varDelta x)\varDelta x m,$$

$$\pi(x+\varDelta x)^2 M - \pi x^2 M = \pi(2x+\varDelta x)\varDelta x M$$

であるから，

$$\pi(2x+\varDelta x)\varDelta x m \leqq \varDelta V \leqq \pi(2x+\varDelta x)\varDelta x M,$$

$$\pi(2x+\varDelta x)m \leqq \frac{\varDelta V}{\varDelta x} \leqq \pi(2x+\varDelta x)M.$$

y の連続性によって $m \approx g(x) \approx M$ だから，

$$\frac{\varDelta V}{\varDelta x} \approx \pi(2x+\varDelta x)g(x) \approx 2\pi x g(x),$$

$$\varDelta V \approx 2\pi x g(x)\varDelta x \quad (\varDelta x \text{ に比べて})$$

となる．無限和定理によって

$$V(a, b) = \int_a^{b} 2\pi x g(x) dx$$

が成りたつ.　┤

例 1　高さ h, 底円の半径 r の直円錐の体積 V を, 上の二つの方法で求めよう. 図15の左のように, x 軸のまわりに廻すと考えれば,

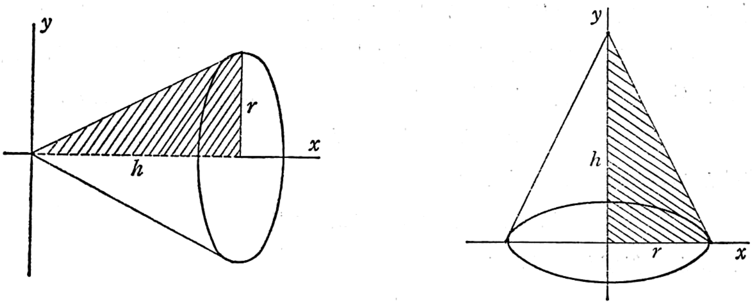


図 15

$$V=\int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx=\pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

つぎに図15の右のように, y 軸のまわりに廻すと考えれば,

$$V=\int_0^r 2\pi x\left(h-\frac{h}{r}x\right)dx=2\pi h\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3r}\right]_0^r=2\pi h\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^2}{3}\right)=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

例 2　二つの曲線 $y=x$ および $y=\sqrt{x}$ によって囲まれる領域を, x 軸, y 軸のまわりに回転させた立体の体積 V_1, V_2 を求める.

$$V_1=\int_0^1 \pi(\sqrt{x})^2 dx-\int_0^1 \pi x^2 dx=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}.$$

$$V_2=\int_0^1 2\pi x\cdot\sqrt{x}\,dx-\int_0^1 2\pi x\cdot x dx=2\pi\int_0^1 (x^{\frac{3}{2}}-x^2)dx$$

$$=2\pi\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2\pi\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{15}\pi.$$

V_1 を求めるとき, $\int_0^1 \pi(\sqrt{x}-x)^2 dx$ を計算すると誤答になる. 一般に $f(x)\leqslant g(x)$ のとき, この間の領域を x 軸のまわりに廻した立体の体積は,

$$\int_a^b \pi(f(x)-g(x))^2 dx$$

ではなく,

$$\int_a^b \pi(f(x)^2-g(x)^2)dx$$

である.

ここで物理への応用を一つだけ挙げる.

定義　ある平面物体が初等領域

$$a\leqslant x\leqslant b, \qquad 0\leqslant y\leqslant g(x)$$

を占めている．その，点 (x, y) における密度（単位面積あたりの質量）が x だけの連続関数 $\rho(x)$ だとする．このとき，その物体の質量は

$$\text{mass} = \int_a^b g(x)\rho(x)dx$$

で与えられる．

正当化 $x=u$ と $x=v$ とで切りとった部分の質量を $m(u, v)$ とし，これについてつぎの三つの性質を仮定する：

（a） $m(u, v)$ は加法性をもつ． (10)

（b） 平面物体 S の領域が平面物体 T の領域に含まれていて，どの点でも S の密度が T の密度を越えなければ，S の質量は T の質量を越えない．(11)

（c） 軸に平行な方形体の密度が一定ならば，その質量は底辺カケル高さカケル密度である． (12)

さて，$[a, b]^*$ の無限小部分区間 $[x, x+\Delta x]$ 上での連続関数 g, ρ の最大値，最小値をそれぞれ $g_{\max}, \rho_{\max}, g_{\min}, \rho_{\min}$ とする．Δm は無限小幅 Δx の帯である．(11) と (12) により，

$$g_{\min}\rho_{\min}\Delta x \leqq \Delta m \leqq g_{\max}\rho_{\max}\Delta x$$

が成りたつ．連続性によって

$$g_{\min} \approx g(x) \approx g_{\max}, \qquad \rho_{\min} \approx \rho(x) \approx \rho_{\max}$$

だから，

$$\Delta m \approx g(x)\rho(x)\Delta x \quad (\Delta x \text{ に比べて})$$

となる．無限和定理によって

$$m(a, b) = \int_a^b g(x)\rho(x)dx$$

となる． ⊣

練習問題 6A

1. つぎの曲線の下の領域を （a） x 軸のまわりに （b） y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ．

（1） $y=x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ （2） $y=\sqrt{1+x^2}$ $(1 \leqslant x \leqslant 1)$

（3） $y=\dfrac{1}{x}$ $(1 \leqslant x \leqslant 2)$

2. つぎの曲線で囲まれる領域を （a） x 軸のまわりに （b） y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ．

（1）$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ y=x^2\sqrt{1-x^4}$　　（2）$x=0,\ x=y-y^4$
（3）$y=0,\ y=x-2,\ y=\sqrt{x}$　　（4）$y=x^p,\ y=x^q,\ 0 \leqq x \leqq 1\ (0<q<p)$

3. つぎの領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ.
（1）$y=\sqrt{1-x^p},\ 0 \leqq x \leqq 1\ (0<p)$　　（2）$y=\sqrt{\sin x},\ 0 \leqq x \leqq \pi$
（3）$y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2},\ 0 \leqq x \leqq \pi$　　（4）$y=e^{1-2x},\ 0 \leqq x \leqq 2$
（5）$y=\sqrt{\frac{2x}{x+1}},\ 0 \leqq x \leqq 1$

4. つぎの領域を y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ.
（1）$y=(x^2+4)^{\frac{1}{3}},\ 0 \leqq x \leqq 2$　　（2）$y=\frac{1}{x^2+1},\ 0 \leqq x \leqq 2$
（3）$y=\frac{\sin x}{x},\ \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$　　（4）$y=\sin(x^2),\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{\pi}$
（5）$y=\frac{e^x}{x},\ 1 \leqq x \leqq 2$

6B　曲線の長さ

定義　実曲線

$$y=f(x), \qquad a \leqq x \leqq b$$

を考える．導関数 $\frac{dy}{dx}$ が $[a,b]$ 上連続のとき，これを**滑らかな曲線**と言う．そして積分

$$s=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

を，この曲線の**長さ**と言う．

正当化　$[u,w]$ 上の曲線の部分の長さという直観的な量を $s(u,w)$ と書く．これについてつぎの二つの性質を仮定する：

（a）$s(u,w)$ は加法性をもつ.　　　（1）

（b）$[x, x+\Delta x]^*$ の各点での曲線の勾配が，点 $P(x,y)$ と点 $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ とを結ぶ線分の勾配に無限に近ければ

$$\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \approx 1$$

が成りたつ．ただし，Δs は $[x, x+\Delta x]^*$ 上の曲線の長さ，$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ は線分の長さである.　　　（2）

さて，無限小区間 $[x, x+\Delta x]^*$ 上，曲線の部分 Δs は点 $P(x,y)$ と点 $Q(x+\Delta x,$

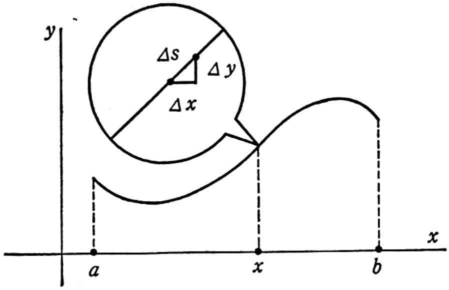


図 16

$y+\Delta y$）とを結んでいる．P から Q への線分の勾配は $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ である．節3Cの系4により，$f'(x)\approx\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ が成りたつ．一方，f' は連続だから，$[x, x+\Delta x]^*$ の任意の点 u に対して $f'(u)\approx\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ が成りたつ．仮定（2),（3）により，

$$\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\approx 1$$

となる．したがって，

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cdot\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\approx\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

ところが $\dfrac{dy}{dx}\approx\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ だから，

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}\approx\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\approx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$\Delta s\approx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\Delta x \quad (\Delta x\text{ に比べて})$$

となる．無限和定理によって

$$s(a, b)=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

が成りたつ．　⊣

例1　$y=2x^{\frac{3}{2}}$, $0\leqq x\leqq 1$ の長さ s を求めよ．

$$\frac{dy}{dx}=3x^{\frac{1}{2}},\quad s=\int_0^1\sqrt{1+9x}\,dx.\quad u=1+9x$$

と置くと，

$$s=\int_1^{10}\frac{1}{9}\sqrt{u}\,du=\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^{10}=\frac{2}{27}(\sqrt{1000}-1).$$

曲線の長さの公式を使って扇形の面積を求める.

定理　原点 O を中心とする半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ の周上に点 $P(r,0)$ および第一象限の点 $Q(x,y)$ があるとする. 弧 PQ の長さを s とすると, 扇形 POQ の面積は

$$A=\frac{1}{2}rs$$

で与えられる.

証明　問題の円周は点 P で垂直だから, x のかわりに y を独立変数に取る. 第一象限では, 円は方程式 $x=\sqrt{r^2-y^2}$ で与えられる. したがって,

$$s=\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy,$$

一方, $\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{y}{\sqrt{r^2-y^2}}=-\dfrac{y}{x}$ だから

$$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{r}{x}.$$

扇形 POQ の面積を A とすると,

$$A=\int_0^y\sqrt{r^2-u^2}du-\frac{1}{2}xy$$

である. y を動かすと,

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dy}&=\sqrt{r^2-y^2}-\frac{1}{2}\left(x+y\frac{dx}{dy}\right)\\&=x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\left(-\frac{y}{x}\right)=\frac{x^2+y^2}{2x}=\frac{r^2}{2x}\end{aligned}$$

となる. したがって

$$\frac{dA}{dx}=\frac{1}{2}r\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

となる. これを 0 から y まで積分すると,

$$A=\frac{1}{2}r\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy=\frac{1}{2}rs$$

が出る. ⊣

もし数 π を単位半円周の長さとして定めると, 上の公式で $r=1$ とおくことによって, 単位円周の長さは 2π, したがってその面積は π になる.

つぎにパラメーター曲線の長さを考える.

定義 閉区間 $[a,b]$ から $\boldsymbol{R}^2$ への関数

$$x=f(t),\quad y=g(t),\quad a\leqslant t\leqslant b$$

を**パラメーター曲線**と言う．$[a,b]$ 上 f', g' が連続であり，各点 t で $f'(t), g'(t)$ の少くとも一方が 0 でないとき，パラメーター曲線は**滑らか**であると言う．また，集合

$$\{(f(t), g(t))\ ;\ a\leqslant t\leqslant b\}$$

をこのパラメーター曲線の**軌跡**と言う．積分

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

を，滑らかなパラメーター曲線の**長さ**と言う．

この長さの公式は，$y=f(x)$ の形の曲線の場合とまったく同様に正当化される．特に $x=t$ のときには，パラメーター方程式や長さの公式はつぎの特別な場合に帰する：

$$y=g(x),\quad a\leqslant x\leqslant b,\quad s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

例 2 パラメーター曲線 $x=at^2$，$y=bt^3$ $(0\leqslant t\leqslant t_0)$ の長さ s を求める．

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{4a^2t^2+9b^2t^4}=t(4a^2+9b^2t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$s=\int_0^{t_0}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\left[\frac{1}{27b^2}(4a^2+9b^2t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{t_0}$$

$$=\frac{1}{27b^2}[(4a^2+9b^2t_0^2)^{\frac{3}{2}}-8a^3]$$

定義 $C:\ a\leqslant t\leqslant b,\ x=f(t),\ y=g(t)$

を滑らかなパラメーター曲線とする．関数 C が $[a,b]$ を C の軌跡の上に一対一に移すとき，Cを**単純パラメーター曲線**と言う．もう一つの単純パラメーター曲線 C_1 がCと同じ軌跡をもつとき，C_1 をCの**再パラメーター化**と言う．

単純パラメーター曲線の長さがその軌跡だけによって決まることを示そう．

再パラメーター化定理 $C:\ a\leqslant t\leqslant b,\ x=f(t),\ y=g(t)$

を単純パラメーター曲線とする．

（i） もう一つのパラメーター曲線

$$C_1:\ A\leqslant u\leqslant B,\ x=F(u),\ y=G(u)$$

が C の再パラメーター化であるためには，$[A, B]$ から $[a, b]$ の上への滑らかな関数（すなわち導関数が連続）$t=h(u)$ で，どの u に対しても $h'(u)$ は0にならず，また

$$F(u)=f(h(u)), \qquad G(u)=g(h(u))$$

となるものが存在することが必要十分である．

（ii）C_1 が C の再パラメーター化ならば，C と C_1 とは同じ長さをもつ．

証明　（i）まず C_1 を C の再パラメーター化とする．端点に関してつぎの二つの場合がある：

場合1　$F(A)=f(a)$，$F(B)=f(b)$，

場合2　$F(A)=f(b)$，$F(B)=f(a)$．

はじめの場合だけ証明する．C および C_1 はそれぞれ $[a, b]$，$[A, B]$ から共通の軌跡 P の上への一対一関数である．したがって $[A, B]$ を $[a, b]$ の上に一対一に移す関数 $t=h(u)$ で，

$$(F(u), G(u))=(f(t), g(t))=(f(h(u)), g(h(u)))$$

なるものがある．我々の場合，h は増加関数である．h が滑らかで，$h'(u)$ が決して0にならないことを示そう．正の無限小 Δu を取り，

$$A\leqq u<u+\Delta u\leqq B$$

とする．Δx に対応する $x=F(u)$，$y=G(u)$，$t=h(u)$ の変化をそれぞれ Δx，Δy，Δt で表わす．すると $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ は正の無限小，したがって Δt も正の無限小である．だから h は連続である．さらに，

$$\frac{\Delta t}{\Delta u}=\frac{\dfrac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta u}}{\dfrac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta t}}=\frac{\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta u}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\right)^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}}\approx\frac{\sqrt{F'(u)^2+G'(u)^2}}{\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}},$$

$$\therefore\quad h'(u)=\frac{\sqrt{F'(u)^2+G'(u)^2}}{\sqrt{f'(h(u))^2+g'(h(u))^2}}.$$

h, F', G', f', g' はすべて連続だから h' も連続であり，もちろん $h'(u)\neq 0$.

つぎに逆を示す．h' が決して0にならないから，h は $[A, B]$ を $[a, b]$ の上に一対一に移す．したがって，C_1 は $[A, B]$ を C の軌跡 P の上に一対一に移す．合成法則により，

$$F'(u)=f'(h(u))h'(u), \qquad G'(u)=g'(h(u))h'(u)$$

が成りたつ．したがって F', G' は連続で，少くとも一方は0でない．すなわち C_1 は C の再パラメーター化である．

（ii） 場合1のときに証明する： $F(A)=f(a)$, $G(A)=g(a)$. （i） の関数 h を取る．我々の場合 $h'(u)$ は正であり，

$$C\text{の長さ}=\int_a^b\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}dt$$
$$=\int_A^B\sqrt{f'(h(u))^2+g'(h(u))^2}\,h'(u)du$$
$$=\int_A^B\sqrt{F'(u)^2+G'(u)^2}du=C_1\text{の長さ}$$

となる． ⊣

つぎに回転体の表面積の公式を正当化する．我々が基礎にするのは，直円錐を軸に垂直な二つの平面で切りとって得られる形（図17）の表面積 A を表わす公式

$$A=\pi(r_1+r_2)l$$

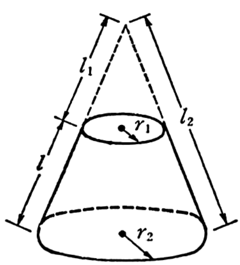


図 17

である．ただし，l は斜高，r_1, r_2 は二つの底円の半径である．A は底円の面積は含まない．この初等的な公式は，円錐をある母線で切って扇形に拡げればすぐに分る．

定義　滑らかな曲線

$$y=f(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

を x 軸のまわりに回転してできる図形の**表面積**を積分

$$A=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

で定義する．また，a と b とが同符号のとき，同じ曲線を y 軸のまわりに回転してできる図形の**表面積**を積分

$$A=\int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

で定義する.

正当化　y 軸のまわりに回転した場合を考える. $u \leqslant x \leqslant v$ 上での曲線の長さを $s(u, v)$, 回転体の表面積（直観的に）を $A(u, v)$ とし, $A(u, v)$ は加法性をもつと仮定する. $[x, x+\Delta x]^*$ を $[a, b]^*$ の無限小部分区間とする. 点 (x, y) から $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ までの線分を y 軸のまわりにまわすと, 無限に薄い直円錐体ができる. その厚さは $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, 底円の半径は x および $x+\Delta x$ である. これの表面積は

$$\pi(x+(x+\Delta x))\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

である. 区間 $[x, x+\Delta x]^*$ 全体の上で, 曲線 $y=f(x)$ と (x, y) から $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ への線分とは, その値, 勾配ともに互いに無限に近い. だから, 問題の表面積 $\Delta A = A(x, x+\Delta x)$ と, 上の錐体の表面積との比は 1 に無限に近いと仮定してもよいだろう：

$$\frac{\Delta A}{\pi(x+(x+\Delta x))\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \approx 1.$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx}$ だから,

$$\frac{\Delta A}{\pi(x+(x+\Delta x))\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \approx \frac{\Delta A}{2\pi x\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta A}{\Delta x}}{2\pi x\sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}} \approx \frac{\dfrac{\Delta A}{\Delta x}}{2\pi x\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

したがって

$$\Delta A \approx 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\Delta x \quad (\Delta x \text{ に比べて})$$

が得られる. 無限和定理によって

$$A(a, b) = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

が成りたつ.

x 軸のまわりをまわす場合も同様である. ⊣

単純パラメーター曲線

$$x=f(t), \quad y=g(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

の場合, この軌跡を y 軸または x 軸のまわりに回転させたとき, できる図形の表

面積はそれぞれ

$$A=\int_a^b 2\pi x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt,$$

$$A=\int_a^b 2\pi y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で定義される.

例 3　$y=\frac{1}{2}x^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を y 軸のまわりに回転させて，その表面積 A を求める.

$$A=\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+x^2}\,dx=\left[\frac{2}{3}\pi(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1).$$

同じ問題を，x 軸と y 軸とを取りかえて考えると，$y=\sqrt{2x}$ $\left(0\leqq x\leqq \frac{1}{2}\right)$ を x 軸のまわりに回転させることになる.

$$A=\int_0^{\frac{1}{2}} 2\pi\sqrt{2x}\sqrt{1+\frac{1}{2x}}\,dx=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{2x+1}\,dx=\left[\frac{2\pi}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1).$$

例 4　$x=2t^2$, $y=t^3$ $(0\leqq t\leqq 1)$ を y 軸のまわりに回転したものの表面積 A を求める.

$$A=\int_0^1 2\pi\cdot 2t^2\sqrt{(4t)^2+(3t^2)^2}\,dt=4\pi\int_0^1 t^3\sqrt{16+9t^2}\,dt$$

$u=16+9t^2$ と置くと，$dt=\frac{1}{18t}du$, $t^2=\frac{u-16}{9}$ だから,

$$A=4\pi\int_{16}^{25} t^3\sqrt{u}\frac{1}{18t}du=4\pi\int_{16}^{25}\frac{1}{18}\left(\frac{u-16}{9}\right)\sqrt{u}\,du=\frac{2\pi}{81}\int_{16}^{25}(u^{\frac{3}{2}}-16\sqrt{u})\,du$$

$$=\frac{5692}{1215}\pi\sim 4.7\pi.$$

練習問題 6B

1. つぎの曲線（パラメーター曲線を含む）の長さを求めよ.

（1） $y=(2x+1)^{\frac{3}{2}}$, $0\leqq x\leqq 2$　（2） $y=\left(x^2+\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, $-2\leqq x\leqq 5$

（3） $y=(x-1)^{\frac{2}{3}}$, $1\leqq x\leqq 9$ （ヒント： x を y の関数で表わせ）

（4） $x=f(t)$, $y=f(t)+C$, $a\leqq t\leqq b$　（5） $x=At+B$, $y=Ct+D$, $a\leqq t\leqq b$

（6） $x=\cos^3\theta$, $y=\sin^3\theta$, $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$　（7） $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $0\leqq t\leqq 1$

（8） $y=\log x$, $a\leqq x\leqq b$

2. つぎの曲線を y 軸のまわりに回転したものの表面積を求めよ.

（1） $y=x^2$, $0\leqq x\leqq 2$　（2） $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$, $1\leqq x\leqq 2$

（3） $x=t+1$, $y=\frac{1}{2}t^2+t$, $0\leqq t\leqq 2$　（4） $y=3x^2-2$, $0\leqq x\leqq 1$

3. つぎの曲線を x 軸のまわりに回転したものの表面積を求めよ.

（1） $y=\frac{1}{3}x^3$, $0\leqq x\leqq 1$　（2） $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^{-2}$, $1\leqq x\leqq 2$

（3） $x=2t+1$, $y=4-t$, $0\leqq t\leqq 4$

（4） $x=At^2+Bt$, $y=2At+B$, $0\leqq t\leqq 1$ $(A, B>0)$

6C 変格積分

第4章では閉区間上の連続関数の積分だけを扱った．変格積分の考えによって，任意の区間上の，高々有限個の不連続点をもつ関数を積分することができる．

定義　半開区間 $[a,b)$ 上の連続関数 f に対し，極限

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{u\to b^-}\int_a^u f(x)dx$$

を a から b までの f の**変格積分**と言う．これが存在するとき，積分は**収束する**と言う．そうでないとき，積分は**発散する**と言う．極限が ∞ のとき，積分は ∞ **に発散する**と言い，

$$\int_a^b f(x)dx=\infty$$

と書く．

他の型の変格積分も同様に定義される．たとえば，半開区間 $(a,b]$ 上連続な f に対しては

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{u\to a^+}\int_a^b f(x)dx.$$

また，無限区間 $[a,\infty)$ 上連続な f に対しては

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)dx.$$

上の定義は，無限小による極限の定義を使って書きかえることができる．四つの場合を例示する．f が $[a,b)$ で連続のとき，

1. $\int_a^b f(x)dx=L \Leftrightarrow u<b,\ u\approx b$ なら $\int_a^u f(x)dx\approx L.$

2. $\int_a^b f(x)dx=\infty \Leftrightarrow u<b,\ u\approx b$ なら $\int_a^u f(x)dx$ は正の無限大.

f が $[a,\infty)$ で連続のとき，

3. $\int_a^\infty f(x)dx=L \Leftrightarrow$ 任意の正の無限大 H に対し，$\int_a^H f(x)dx\approx L.$

4. $\int_a^\infty f(x)dx=\infty \Leftrightarrow$ 任意の正の無限大 H に対し，$\int_a^H f(x)dx$ は正の無限大.

定理 1　f が $[a,b]$ 上連続ならば，a から b までの f の変格積分は収束し，f の定積分に等しい．

証明　$F(u)=\int_a^u f(x)dx$ と置くと，節4Cの第二基本定理によって F は $[a,b]$ 上連続である．したがって

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{u\to b-}\int_a^u f(x)dx.$$

ただし，左辺は f の定積分を表わす．　⊣

定理 2　$[a,\infty)$ 上の連続関数 f が負の値を取らなければ，そこでの変格積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ は収束するか，または ∞ に発散するかのどちらかである．

証明　$F(u)=\int_a^u f(x)dx$ と置くと，F は $[a,\infty)$ で連続かつ非減少である．

1°　F の値域が有界の場合．値域の上限を L とする．H を正の無限大超実数としよう．任意の $u\geqslant a$ は式 $F(u)\leqslant L$ の解だから $F(H)\leqslant L$ である．L より小さい実数 r を取ると，$a\leqslant u$ なる実数 u で $F(u)>r$ なるものがある．式 $v\geqslant u$ の任意の実解 v は式 $F(v)\geqslant F(u)$ の解，したがって $F(v)>r$ の解である．だから $F(H)>r$．これは L より小さい任意の r に対して成りたつから $F(H)\approx L$，すなわち $\int_a^\infty f(x)dx=L$.

2°　F の値域が有界でない場合．H を正の無限大としよう．任意の実数 r に対し，$u\geqslant a$ なる実数 u で $F(u)>r$ なるものがある．$F(H)\geqslant F(u)$ だから $F(H)>r$．したがって $F(H)$ は正の無限大，すなわち $\int_a^\infty f(x)dx=\infty$.　⊣

例 1　（1）$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$．$u>0$ に対し，$\int_u^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_u^1=2-2\sqrt{u}$.

$$\therefore\quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{u\to 0+}(2-2\sqrt{u})=2.$$

（2）$\int_0^1 x^{-2}dx$．$u>0$ に対し，$\int_u^1 x^{-2}dx=\left[-x^{-1}\right]_u^1=-1+\frac{1}{u}$.

$$\therefore\quad \int_0^1 x^{-2}dx=\lim_{u\to 0+}\left(-1+\frac{1}{u}\right)=\infty.$$

たとえば，$\int_{-1}^1 x^{-2}dx=\left[-x^{-1}\right]_{-1}^1=-2$ とすると誤答になる．実際，$y=\frac{1}{x^2}$ は $x=0$ で連続でないから，上のように，$\int_0^1 x^{-2}dx$，$\int_{-1}^0 x^{-2}dx$ を別々に考える必要がある．それらがともに収束しないかぎり，$\int_{-1}^1 x^{-2}dx$ は収束しない．

（3）$[1,\infty)$ 上の曲線 $y=x^{-3}$ の下の領域の面積 A を求める．$u>0$ に対し，

$$\int_1^u x^{-3}dx=\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^u=-\frac{1}{2}u^{-2}+\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad A=\lim_{u\to\infty}\left(-\frac{1}{2}u^{-2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

（4） $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}$.　$u>0$ に対し，$\displaystyle\int_0^u\frac{dx}{1+x^2}=\Big[\arctan x\Big]_0^u=\arctan u$

$$\therefore\quad \int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{u\to\infty}\arctan u=\frac{\pi}{2}.$$

例 2　一般に $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha dx$ を考える．$\alpha\neq-1$ なら，$u>0$ に対し，$\displaystyle\int_u^1 x^\alpha dx=\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_u^1=\frac{1}{\alpha+1}(1-u^{\alpha+1})$．したがって，$\alpha>-1$ ならこれは収束し，$\displaystyle\int_0^1 x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}$，$\alpha<-1$ なら ∞ に発散する．$\alpha=-1$ なら，$\displaystyle\int_u^1 x^{-1}dx=\Big[\log x\Big]_u^1=-\log u$．したがって積分は ∞ に発散する．

例 3　$\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha dx$．$\alpha\neq-1$ なら，$u>0$ に対し，$\displaystyle\int_1^u x^\alpha dx=\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^u=\frac{1}{\alpha+1}(u^{\alpha+1}-1)$．したがって，$\alpha>-1$ ならこれは ∞ に発散し，$\alpha<-1$ なら収束して $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha dx=-\frac{1}{\alpha+1}$．$\alpha=-1$ なら $\displaystyle\int_1^u x^{-1}dx=\Big[\log x\Big]_1^u=\log u$．したがって積分は ∞ に発散する．

練習問題 6C

1.　つぎの変格積分の収束，発散を判定し，収束のときはその値を求めよ．

（1） $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　（2） $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{-\frac{1}{3}}dx$　（3） $\displaystyle\int_0^2\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$

（4） $\displaystyle\int_{-5}^3\frac{x}{|x|}dx$　（5） $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$　（6） $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx$　（7） $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan x\,dx$

2.　つぎの変格積分の収束，発散を判定せよ．

（1） $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$　（2） $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx$　（3） $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$

（4） $\displaystyle\int_0^\infty\frac{|\sin x|}{x}dx$

7 三　角　関　数

三角関数の研究の出発点は単位円の弧長の概念である．節2Eでは幾何学的に三角関数を扱った．それは微積分を知らない生徒もよく知っているもので，曲線の長さを表わす積分公式とは無関係だった．

ここでは曲線の長さの積分公式に基づく，簡潔な解析的手法を展開する．まず逆関数定理から始める．

7 A　逆関数定理

実数の二項関係 $X\subset \boldsymbol{R}^2$ に対し，その**逆関係**とは

$$Y=\{(y,x)\,;\ (x,y)\in X\}$$

のことである．明らかにYの逆関係はXである．f, g が実関数で，g がfの逆関係であるとき，g を f の**逆関数**と言う．逆関数についての簡単なことを列挙する．

補題 1　（i）実関数fが逆関数をもつのは，f が一対一の場合である．

（ii）gがfの逆関数であるのは，二つの方程式

$$f(x)=y \quad \text{および} \quad g(y)=x$$

が同じ解集合をもつことである．

（iii）gがfの逆関数であるためには，gの定義域がfの値域に等しく，しかもfの定義域の任意のxに対して $g(f(x))=x$ が成りたつことが必要十分である．

特にfが増加関数，すなわち $x<y$ なら $f(x)<f(y)$，であれば，f は一対一だから逆関数をもつ．減少関数の場合も同様である．

定理 2　fを区間 I 上の連続な増加関数，gをfの逆関数とする．このときgの定義域もある区間Jであり，gはJ上連続な増加関数である．

証明　gの定義域をJとする．$A, B\in J$，$A<B$ とし，$a=g(A)$，$b=g(B)$ と置くと，$f(a)=A$，$f(b)=B$ である．もし $b\leqslant a$ なら $B=f(b)\leqslant f(a)=A$ と

なってしまうから $a<b$, すなわち g は増加関数である.

つぎに $A<C<B$ なる実数 C を取ると, f に対する中間値の定理により, (a, b) の点 c で $f(c)=C$ となるものがある. したがって c は f の値域, すなわち g の定義域 J に属する. よって J は区間である.

最後に g の連続性を示すため, $A\in J$, $X\in J^*$, $A\approx X$ としよう. $a=g(A)$, $x=g(X)$ と置いて $a\approx x$ を示せばよい. $A<X$ の場合を考える. $a\in I$, $f(a)=A$ であり, 解の公理によって $x\in I^*$, $f(x)=X$ である. g は増加だから g^* も増加, したがって $a<x$ である. かりに $a\not\approx x$ と仮定すると, I に属する実数 c で $a<c<x$ なるものがある. すると $f(a)<f(c)<f(x)$ となり, 仮定 $f(a)=A\approx X=f(x)$ に反する. よって $a\approx x$ でなければならない. $X>A$ の場合もまったく同様, 結局 g は J 上連続である. ⊣

逆関数定理　f を開区間 I 上の連続な増加関数, g を f の逆関数とする. I の点 x で f が微分可能で $f'(x)\neq 0$ ならば, g は点 $y=f(x)$ で微分可能で,

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

が成りたつ.

証明　Δy を 0 でない無限小として,

$$\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}\approx\frac{1}{f'(x)}$$

を示せばよい. f の値域すなわち g の定義域を J とする. I が開区間だから J も開区間である. だから点 $y=f(x)$ は J の内部にあり, したがって $g(y+\Delta y)$ は定義されている. $x=g(y)$ である.

$$\Delta x=g(y+\Delta y)-g(y)$$

と置く. 定理 2 によって g は連続かつ増加だから Δx は無限小でしかも 0 でない.

$$x+\Delta x=g(y+\Delta y),\qquad f(x+\Delta x)=y+\Delta y$$

だから,

$$f'(x)\approx\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$f'(x)\neq 0$ だから,

$$\frac{1}{f'(x)}\approx\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}$$

となる. ⊣

つぎにもう一つの逆関数定理を証明する．これはベーレンスによるもの（巻末文献の中のストロイアンの本を見よ）で，f がある近傍で連続であることを要求しない．この形の定理はあとでやる二変数の場合に都合がよい．

定義 実関数 f が実数 c で**一様微分可能**であるとは，$f'(c)$ が存在し，さらに c に無限に近い任意の x および任意の 0 でない無限小 Δx に対して

$$f'(c) \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

が成りたつことである．

節3C定理3により，f が開区間 I 上で連続な導関数をもつことと，I の各点 c で f が一様微分可能なこととは同値である．今度は一点での一様微分可能性を考える．

定理 3 f が c で一様微分可能ならば，f は c のある近傍 I 上連続である．

証明 $L=|f'(c)|+1$ とおく．c のある近傍 $(c-r, c+r)$ の上でリプシッツ条件

任意の $x, y \in (c-r, c+r)$ に対して $|f(x)-f(y)| \leqq L|y-x|$ （1）

が成りたつことを言えばよい．f はとにかく c のある近傍で定義されている．かりにどんな正実数 r に対しても（1）が成りたたないとしてみよう．すると，式 $r>0$ の実解はすべて式系

$$x, y \in (c-r, c+r), \quad |f(y)-f(x)|>L|y-x| \qquad (2)$$

の部分実解である．そこで r_1 を正の無限小とする．部分解定理により，ある超実数 x_1, y_1 に対して（2）が成りたつ．したがって

$$x_1 \approx c, \quad y_1 \approx c, \quad \left|\frac{f(y_1)-f(x_1)}{y_1-x_1}\right|>|f'(c)|+1$$

となり，f の c での一様微分可能性に反する． ⊣

局所逆関数定理 増加関数 f が実数 x で一様微分可能であり，かつ $f'(x) \neq 0$ とする．このとき f の逆関数 g は $y=f(x)$ で一様微分可能で，

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

が成りたつ．

証明 前定理によって f は x のある近傍で連続だから，前出の逆関数定理に

よって $g'(y)$ が存在し，$g'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$ となる．　⊣

逆関数定理のつぎの応用は，単純パラメーター曲線に対してその長さ自身を独立変数に取ることができることを示す．

定理 4　　$C:\ a\leqq t\leqq b,\ x=f(t),\ y=g(t)$
を単純パラメーター曲線とする．すると，Cは端点からの長さ s をパラメーターとする再パラメーター化

$$C_1:\ 0\leqq s\leqq L,\ x=F(s),\ y=G(s)$$

をもつ．Lは曲線の全長である．

証明　$[a,t]$ に対する曲線 C の長さを $l(t)$ とすると，

$$l(t)=\int_a^t\sqrt{f'(u)^2+g'(u)^2}\,du$$

だから，$l'(t)=\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}$ はつねに正で連続であり，関数 l は $[a,b]$ を $[0,L]$ の上に一対一に移す．逆関数定理により，l の逆関数 h は $[0,L]$ を $[a,b]$ の上に一対一に移し，

$$h'(s)=\frac{1}{l'(h(s))}>0$$

となる．h も l' も連続だから h' も連続である．したがって節 6B の再パラメーター化定理（逆向きの方）により，曲線

$$C_1:\ 0\leqq s\leqq L,\ x=f(h(s)),\ y=g(h(s))$$

は C の再パラメーター化であり，C_1 の 0 から s までの長さは $l(h(s))=s$ である．　⊣

7 B　三角関数の導関数

まず三角関数を定義し，逆関数定理を使ってそれらが微分可能なことを示す．

定義　単位半円周

$$x=\sqrt{1-y^2},\qquad -1\leqq y\leqq 1$$

の長さを**円周率**と言い，π で表わす．

定義　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とし，点 $(0,1)$ から単位円に沿って左まわりに距離 θ の点

を $P(x, y)$ とする．このとき，

$$x=\cos\theta, \qquad y=\sin\theta$$

と定義する．

補題 1　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ に対して関数 $y=\sin\theta$，$x=\cos\theta$ はともに微分可能で，

$$\frac{d(\sin\theta)}{d\theta}=\cos\theta, \qquad \frac{d(\cos\theta)}{d\theta}=-\sin\theta$$

が成りたつ．

証明　前節の定理 4 と同じ論法を関数 $x=\sqrt{1-y^2}$ $(0\leqq y<1)$ に適用する．

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$$

だから

$$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{y^2}{1-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

となる．θ は弧の長さだから

$$\theta=\int_0^y\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du.$$

定義によって，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ である．$0\leqq y<1$ に対して θ は y の増加関数で，連続な導関数

$$\frac{d\theta}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

をもつ．逆関数定理によって $y=\sin\theta$ は微分可能で，

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{1}{\frac{d\theta}{dy}}=\sqrt{1-y^2}=x=\cos\theta$$

となる．同様に

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\theta}=-y=-\sin\theta$$

が成りたつ．

つぎに，$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ で定義された二つの関数 $\sin\theta, \cos\theta$ を，

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta, \qquad \sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$$

によって実軸全体の上の関数に延張する．これらの関数が 2π を周期としてもつことはすぐに分る．補題 1 の内容は任意の実数 θ に対しても成りたつ．この証明

は読者に任せる：

定理 2　$\dfrac{d(\sin\theta)}{d\theta}=\cos\theta,\qquad \dfrac{d(\cos\theta)}{d\theta}=-\sin\theta\qquad(-\infty<\theta<\infty)$

他の三角関数の定義はつぎのとおり：

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\qquad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\qquad \mathrm{cosec}\,\theta=\frac{1}{\sin\theta}.$$

逆三角関数は，三角関数を $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ または $[0,\pi]$ に制限して逆関数を取ったものである．たとえば

arcsin x は $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ での $\sin\theta$ の逆関数,

arctan x は $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ での $\tan\theta$ の逆関数,

arcsec x は $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ での $\sec\theta$ の逆関数

である．逆関数定理により，逆三角関数はすべて端点以外では微分可能であり，普通のやりかたでつぎのような導関数の公式が得られる：

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad |x|<1.$$

$$\frac{d(\arctan x)}{dx}=\frac{1}{1+x^2},\quad -\infty<x<\infty.$$

$$\frac{d(\mathrm{arcsec}\,x)}{dx}=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}},\quad |x|>1.$$

7 C　極座標における面積

ここでは読者が極座標についてすでに知っているものとする．無限和定理によって極座標における面積の公式が得られる．

定義　平面の極座標 r,θ によって

$$\{(r,\theta)\ ;\ a\leqslant\theta\leqslant b,\ f(\theta)\leqslant r\leqslant g(\theta)\}$$

と書かれる集合を**初等極領域**と言う．ただし，$b\leqslant a+2\pi$ であり，f,g は $[a,b]$ 上連続で $0\leqslant f(\theta)\leqslant g(\theta)$ なるものとする(図 18)．

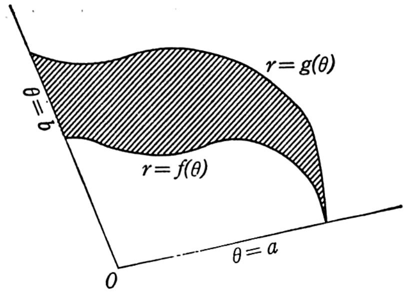


図 18

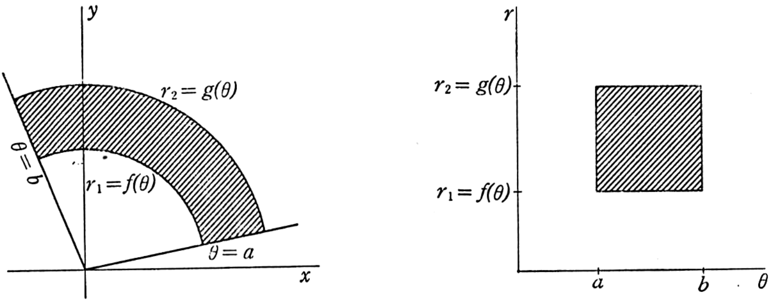


図 19

関数 f, g が定数のときの初等極領域を**極方形**と言う．実際，(r, θ) を直交座標と思えば，これは方形である(図 19)．極方形のもっとも簡単なものは扇形

$$\{(r, \theta)\ ;\ a \leqslant \theta \leqslant b,\ 0 \leqslant r \leqslant c\}$$

である．面積の公式に達するための我々の出発点は，上の扇形の面積公式

$$A = \frac{1}{2} c^2 (b-a)$$

である．これは節 6B 定理 1 の公式 $A = \frac{1}{2} rs$ (r は半径，s は弧長) からすぐ出る．実際，$r=c$, $s=(b-a)r$ である．

つぎのような簡単な初等極領域を考えよう：

$$D = \{(r, \theta)\ ;\ a \leqslant \theta \leqslant b,\ 0 \leqslant r \leqslant g(\theta)\}.$$

定義　$b \leqslant a+2\pi$ とし，$g(\theta)$ を $a \leqslant \theta \leqslant b$ 上の負でない連続関数とする．$u, v \in [a, b]$ に対して定義される関数 $A(u, v)$ がつぎの二条件をみたすとき，これを g の**極面積関数**と言う：

(ｉ)　$A(u, w) = A(u, v) + A(v, w)$.

（ii）$[u, v]$ 上の g の最大値を M，最小値を m とすると，

$$\frac{1}{2}m^2(v-u) \leqslant A(u, v) \leqslant \frac{1}{2}M^2(v-u).$$

条件（ii）は，$A(u, v)$ が領域 D に内接する扇形の面積と外接する扇形の面積との間の大きさであることを示す．

定理　g の極面積関数は唯一つ，定積分

$$A(a, b) = \int_a^b \frac{1}{2} g(\theta)^2 d\theta$$

である．

証明　$A(u, v) = \int_u^v \frac{1}{2} g(\theta)^2 d\theta$ は g の極面積関数である．実際， 加法性は明らかだし，（ii）は

$$\int_u^v \frac{1}{2} m^2 d\theta \leqslant \int_u^v \frac{1}{2} g(\theta)^2 d\theta \leqslant \int_u^v \frac{1}{2} M^2 d\theta,$$

$$\int_u^v \frac{1}{2} m^2 d\theta = \frac{1}{2} m^2 (v-u), \quad \int_u^v \frac{1}{2} M^2 d\theta = \frac{1}{2} M^2 (v-u)$$

によって成りたつ．

一意性を示すために，$B(u, v)$ が g の極面積関数だとする．$[\theta, \theta+\Delta\theta]^*$ を $[a, b]^*$ の無限小部分区間とする．$[\theta, \theta+\Delta\theta]^*$ 上の g の最大値を M， 最小値を m とすると，連続性によって $m \approx g(\theta) \approx M$．性質（ii）に解の公理を使って，

$$\frac{1}{2} m^2 \Delta\theta \leqslant \Delta B \leqslant \frac{1}{2} M^2 \Delta\theta,$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} m^2 \leqslant \frac{\Delta B}{\Delta\theta} \leqslant \frac{1}{2} M^2,$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta B}{\Delta\theta} \approx \frac{1}{2} g(\theta)^2,$$

$$\therefore \quad \Delta B \approx \frac{1}{2} g(\theta)^2 \Delta\theta \quad (\Delta\theta \text{ に比べて})$$

となる．（i）によって B は加法性をもつから，無限和定理によって

$$B(a, b) = \int_a^b \frac{1}{2} g(\theta)^2 d\theta$$

を得る．　⊣

これからただちに一般の初等極領域の面積公式

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} (g(\theta)^2 - f(\theta)^2) d\theta$$

が正当化される．

例　二本の曲線 $r=\sin\theta$, $r=\cos\theta$ の図をかき，その共通部分の面積を求める．この二つはともに半径 $\frac{1}{2}$ の円で，一方の中心は $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 一方は $\left(\frac{1}{2},0\right)$ である．交点は原点および $\theta=\frac{\pi}{4}$ に対する $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である．面積をAとすると，

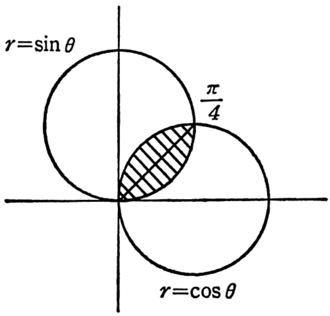


図 20

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin^2\theta d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos^2\theta d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{4}-0\right)+\left(\frac{\pi}{8}-0\right)+\left(0-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)\right]=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}.$$

練 習 問 題 7C

1.　極座標で表わされたつぎの曲線の概形をかけ．

（1）$r=\theta$　（2）$r=1+\cos\theta$　（3）$r=\sin\theta+\cos\theta$　（4）$r=\tan\theta$

2.　つぎの曲線で囲まれる領域の面積を求めよ．

（1）$r=2a\cos\theta$　（2）$r=1+\cos\theta$　（3）$r=\sqrt{\sin\theta}$

（4）$\theta=0,\ \theta=\frac{\pi}{3},\ r=\cos\theta$　（5）$r=\sqrt{3}\cos\theta,\ r=\sin\theta$　（6）$r=1+\sin^2\theta$

3.　極座標による滑らかな単純曲線

$$r=f(\theta),\qquad a\leqq\theta\leqq b$$

の長さ s は

$$s=\int_a^b\sqrt{f(\theta)^2+f'(\theta)^2}d\theta=\int_a^b\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta$$

で表わされることを示せ．

4.　前問の曲線を y 軸，x 軸のまわりに回転したものの表面積 A_1, A_2 はそれぞれ

$$A_1=\int_a^b 2\pi r\cos\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta,\qquad A_2=\int_a^b 2\pi r\sin\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta$$

で表わされることを示せ．

8 指 数 関 数

指数関数および対数関数を導入するやりかたはたくさんある．その中で，関数 a^x を，x の連続関数で，x が有理数 $\frac{m}{n}$ のときには $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ となるものとして定義するのが一番自然だと思う．ここでは一般に連続関数の一意延長性を超実数を使って示し，その結果を指数関数に適用する．

8 A 連続関数の延長

まず実数の集合の閉包の超実数による特徴づけ（節1D系3）および一様連続性の定義（節3A）を思いだそう．$\boldsymbol{R}$ の部分集合 Y の閉包 $\overline{Y}$ は，

$$\overline{Y}=\{st(y)\text{；}\ y\text{は有限で}\ y\in Y^*\}$$

と書けた．また，実関数 f が $\boldsymbol{R}$ の部分集合 Y 上一様連続であるとは，$x, y\in Y^*$，$x\approx y$ なら $f(x)\approx f(y)$ ということだった．

つぎの節で示すように，指数関数 a^x は有理数の全体 $\boldsymbol{Q}$ 上で一様連続ではないが，$\boldsymbol{Q}$ の任意の有界部分集合の上で一様連続である．

定理1　$\boldsymbol{R}$ の部分集合 Y 上の実関数 f が Y の任意の有界部分集合の上で一様連続であるためには，Y^* に属する有限な x, y について，$x\approx y$ なら $f(x)\approx f(y)$ となることが必要十分である．

証明　超実数 x, y が有限で Y^* に属するのは，ある区間 $[a, b]$ に対して $x, y\in(Y\cap[a, b])^*$ となる場合である．　⊣

定理2　Y 上の関数 f が Y の任意の有界部分集合の上で一様連続であるとする．このとき，f は Y の閉包 $\overline{Y}$ 上の連続関数に一意的に延長される．

証明　Y^* の有限な点 x に対して

$$g(st(x))=st(f(x))$$

と置く．f に関する仮定により，$st(x)=st(y)$ なら $st(f(x))=st(f(y))$ だから，g はあいまいさなく定義される．節1D系3によって g の定義域は Y の閉包 $\overline{Y}$ である．$r\in Y$ なら

$$g(r)=g(st(r))=st(f(r))=f(r)$$

だから，g は f の延長になっている．

g が $\overline{Y}$ の任意の点で連続なことを示す．

$$X=Y\cap[c-1,c+1]$$

と置く．節5A定理4の(iii) ε-δ 条件を使う：任意の正実数 ε に対し，1より小さい正実数 δ を適当に取ると，$x,y\in X$，$|x-y|<\delta$ なら $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$ が成りたつ．解の公理により，$x,y\in X^*$，$|x-y|<\delta$ なら $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$ である．さて，$b\in\overline{Y}$，$|b-c|<\delta$ としよう．節1D系3により，$b=st(x)$，$c=st(y)$，$x,y\in Y^*$ と書ける．$|b-c|<\delta<1$ だから，

$$x,y\in X^*,\qquad |x-y|<\delta$$

である．したがって，

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\therefore\quad |st(f(x))-st(f(y))|\leqq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

$$\therefore\quad |g(b)-g(c)|<\varepsilon,$$

すなわち g の c での ε-δ 条件がみたされる．

最後に延長の一意性を示すために，h を f のもう一つの延長とすると，$c\in\overline{Y}$ に対して

$$h(c)=h(st(x))=st(h(x))=st(f(x))=g(c)$$

となる．ただし，$x\in Y^*$，$c=st(x)$．　⊣

8B 指数関数 e^x の定義および導関数

有理数の全体 $\boldsymbol{Q}$ の自然拡大 $\boldsymbol{Q}^*$ の元を**超有理数**と言う．つぎに挙げる $\boldsymbol{Q}^*$ の諸性質は解の公理からすぐ出る．

定理1　(i) $\boldsymbol{Q}^*$ は $\boldsymbol{R}^*$ の部分体である．すなわち，$\boldsymbol{Q}^*$ は足算，引算，掛算，0でない数による割算で閉じている．

(ii) $\boldsymbol{Q}^*$ は $\boldsymbol{R}^*$ で稠密である．すなわち，$b,c\in\boldsymbol{R}^*$，$b<c$ なら，$b<q<c$ なる $q\in\boldsymbol{Q}^*$ が存在する．

(iii) 任意の $x\in\boldsymbol{R}^*$ に対し，$x\approx q$ なる $q\in\boldsymbol{Q}^*$ が存在する（これは(ii)か

ら出る).

$\boldsymbol{Q}$ の閉包は実数直線 $\boldsymbol{R}$ 全体である．これはたとえば $x\in\boldsymbol{R}$ に（iii）を使えば分る．つぎに，有理指数の性質をまとめておく．

補題 2　a, b を正の実数，q, r を有理数とする．

（i）$1^q=1$.

（ii）$a^{q+r}=a^qa^r$, $a^{q-r}=\dfrac{a^q}{a^r}$.

（iii）$a^{qr}=(a^q)^r$.

（iv）$a^qb^q=(ab)^q$.

（v）$a<b$, $q>0$ なら $a^q<b^q$.

（vi）$1<a$, $q<r$ なら $a^q<a^r$.

（vii）$a\geqslant 0$, $q\geqslant 1$ なら $(a+1)^q\geqslant aq+1$.

補題 3　a を正の実数とする．$\boldsymbol{Q}$ 上の関数 $f(x)=a^x$ は $\boldsymbol{Q}$ の任意の有界部分集合の上で一様連続である．

証明　まず $a\geqslant 1$ とする．$q, r\in\boldsymbol{Q}^*$, $q\approx r$, $q<r$ として $a^q\approx a^r$ を示せばよい．$b=a^{r-q}-1$ と置く．前の補題の（vi）および解の公理によって，$b\geqslant 0$ である．さらに，（vii）と解の公理とにより，

$$a=(b+1)^{\frac{1}{r-q}}\geqslant\frac{b}{r-q}+1\geqslant 1$$

となるから $\dfrac{b}{r-q}$ は有限，したがって $b\approx 0$, したがって $a^{r-q}\approx 1$ である．$n\leqslant q<n+1$ なる整数 n を取ると，（vi）によって $a^n<a^q<a^{n+1}$ だから a^q は有限，したがって $a^r\approx a^q$ である．

$0<a\leqslant 1$ の場合には $a^{-1}\geqslant 0$ だから，

$$a^r=(a^{-1})^{-r}\approx(a^{-1})^{-q}=a^q$$

となる．　⊣

前節の定理 2 によってつぎの定義が正当化される．

定義　a を正の実数とする．$\boldsymbol{Q}$ 上の関数 a^q を延長した $\boldsymbol{R}$ 上の唯一つの連続関数を**底 a の指数関数**と言い，a^x と書く．

定理 4　補題 2 の指数法則（i）～（vii）は任意の実数 q, r に対しても成りたつ．

証明　(iii) 以外はすべて補題2と，$q_1 \approx q$，$r_1 \approx r$ なる超有理数 q_1, r_1 が存在することによって簡単に証明される．ここでは，$1<a$，$q, r>0$ の場合に (iii) を証明する．超有理数 q_1, q_2, r_1, r_2 を選んで

$$q_1 \approx q_2, \qquad q_1 < q < q_2,$$
$$r_1 \approx r_2, \qquad r_1 < r < r_2$$

とする．

$$q_1 r_1 < qr < q_2 r_2$$

だから，(vi) と解の公理とによって，

$$a^{q_1 r_1} < a^{qr} < a^{q_2 r_2},$$
$$a^{q_1} < a^q < a^{q_2},$$
$$(a^{q_1})^{r_1} < (a^q)^r < (a^{q_2})^{r_2}$$

が成りたつ．一方，超有理指数に対する (iii) により，

$$a^{q_1 r_1} = (a^{q_1})^{r_1}, \qquad a^{q_2 r_2} = (a^{q_2})^{r_2}$$

が成りたつ．ところが $q_1 r_1 \approx qr \approx q_2 r_2$ だから，連続性によって

$$a^{q_1 r_1} \approx a^{qr} \approx a^{q_2 r_2}$$

が成りたち，したがって $a^{qr} \approx (a^q)^r$ となる．両辺とも実数だから，これらは等しくなければならない．　⊣

定義　a を1でない正の実数とする．底 a の指数関数の逆関数を**底 a の対数関数**と言い，$\log_a y$ で表わす：

$$x = \log_a y \Longleftrightarrow y = a^x.$$

節7Aの定理2により，$\log_a y$ は $(0, \infty)$ を定義域とする連続関数である．対数関数の乗法定理その他の諸法則は，指数関数の対応する法則から簡単に導かれる．これらは今後自由に使うことにする．

つぎに数 e を導入する．

補題5　極限 $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ が存在する．

証明　b を1より大きい勝手な実数とする．関数 $y=b^t$ は連続で正だから，$c=\int_0^1 b^t dt$ が存在して正である．任意の正の無限大 H に対して

$$\left(1+\frac{1}{H}\right)^H \approx b^{\frac{c}{b-1}}$$

が成りたつことを示せばよい．そのためには b を底とする両辺の対数を取って，

$$H\log_b\left(1+\frac{1}{H}\right)\approx\frac{c}{b-1}$$

を示せばよい．

$$\varDelta t=\log_b\left(1+\frac{1}{H}\right)$$

と置くと $\varDelta t$ は正でしかも無限小である．実際，$\varDelta t\approx\log_b 1=0$．さらに，

$$b^{\varDelta t}=1+\frac{1}{H},\qquad H=\frac{1}{b^{\varDelta t}-1},$$

$$\therefore\quad H\log_b\left(1+\frac{1}{H}\right)=\frac{\varDelta t}{b^{\varDelta t}-1}$$

となる．つぎにリーマン和 $\sum_0^1 b^t\varDelta t$ を評価する．式系

$$\varDelta u>0,\ n\in\boldsymbol{Z},\ n\varDelta u<1\leqslant(n+1)\varDelta u \tag{1}$$

の実解はすべて式系

$$(1+b^{\varDelta u}+\cdots+b^{(n-1)\varDelta u})\varDelta u\leqslant\sum_0^1 b^u\varDelta u$$
$$\leqslant(1+b^{\varDelta u}+\cdots+b^{n\varDelta u})\varDelta u$$

の解である．この式系は等比級数の和の公式によって

$$\frac{b^{n\varDelta u}-1}{b^{\varDelta u}-1}\leqslant\sum_0^1 b^u\varDelta u\leqslant\frac{b^{(n+1)\varDelta u}-1}{b^{\varDelta u}-1}\varDelta u \tag{2}$$

と書きなおせる．そこで

$$K\varDelta t<1\leqslant(K+1)\varDelta t$$

なる超整数 K を取ると，解の公理によって

$$\frac{b^{K\varDelta t}-1}{b^{\varDelta t}-1}\leqslant\sum_0^1 b^t\varDelta t\leqslant\frac{b^{(K+1)\varDelta t}-1}{b^{\varDelta t}-1}\varDelta t$$

が成りたつ．よって

$$H\log_b\left(1+\frac{1}{H}\right)(b^{K\varDelta t}-1)\leqslant\sum_0^1 b^t\varDelta t\leqslant H\log_b\left(1+\frac{1}{H}\right)(b^{(K+1)\varDelta t}-1),$$

$$\frac{\sum_0^1 b^t\varDelta t}{b^{(K+1)\varDelta t}-1}\leqslant H\log_b\left(1+\frac{1}{H}\right)\leqslant\frac{\sum_0^1 b^t\varDelta t}{b^{K\varDelta t}-1}$$

となる．$K\varDelta t\approx1\approx(K+1)\varDelta t$ だから，

$$\frac{c}{b-1}\approx H\log_b\left(1+\frac{1}{H}\right)$$

を得る．ただし，$c=\int_0^1 b^t dt$．H は任意の正の無限大だったから，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=b^{\frac{c}{b-1}}$$

となる．　⊣

定義　$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$，$\log x=\log_e x$．

定理 6　指数関数 e^x は微分可能で，

$$\frac{d(e^x)}{dx}=e^x.$$

証明　まず Δx を正の無限小とし，$b=\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ と置いて $b\approx 1$ を示す．e^x は連続だから $e^{\Delta x}\approx 1$．したがって $b\Delta x=e^{\Delta x}-1\approx 0$．よって $H=\dfrac{1}{b\Delta x}$ は正の無限大である．補題 5 により，

$$e\approx\left(1+\frac{1}{H}\right)^H=(1+b\Delta x)^{\frac{1}{b\Delta x}}=(e^{\Delta x})^{\frac{1}{b\Delta x}}=e^{\frac{1}{b}}.$$

したがって $b\approx 1$ である．

x を実数とすると，

$$\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=be^x\approx e^x,\qquad \frac{e^{x-\Delta x}-e^x}{-\Delta x}=e^{-\Delta x}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}\approx e^x.$$

したがって $\dfrac{d(e^x)}{dx}=e^x$．　⊣

一般の底の場合には，$a^x=e^{x\log a}$ だから，

$$\frac{d(a^x)}{dx}=\frac{d(e^{x\log a})}{dx}=\log a\cdot e^{x\log a}=\log a\cdot a^x$$

となる．$a\neq e$ なら $\log a\neq 1$ だから，数 e は $\dfrac{d(e^x)}{dx}=e^x$ を成立させる唯一つの数である．

系 7　$y=\log x$ はあらゆる正実数 x で微分可能で，

$$\frac{d(\log x)}{dx}=\frac{1}{x}.$$

証明　$y=\log x$ なら $x=e^y$ である．逆関数定理によって $\dfrac{dy}{dx}$ は存在し，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}.$$
⊣

9 無 限 級 数

この章を通じ，H および K は正の無限大超整数を表わす．負でない整数を自然数と言い，その全体を N と書く．正の整数の全体を N^+ と書く．

9A 数 列

N ないし N^+ から R への関数を**無限数列**と言う．普通それを $\langle a_n \rangle$ 等と書く．

定義　無限数列 $\langle a_n \rangle$ が実数 L に**収束する**とは，任意の正の無限大超整数 H に対して $a_H \approx L$ が成りたつことである．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ と書く．

任意の正の無限大超整数 H に対して a_H が正の無限大超実数であるとき，数列 $\langle a_n \rangle$ は ∞ に**発散する**と言い，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ と書く．

いくつかの代表的な極限の計算から始める．

定理 1　つぎの数列はすべて ∞ に発散する：

(i) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{b^n} = \infty \quad (b \geqq 1)$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b^n}{n^c} = \infty \quad (b>1,\ c \geqq 0)$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^c}{\log n} = \infty \quad (c>0)$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \log n = \infty$.

証明　H を正の無限大超整数とし，

$$\frac{H!}{b^H},\quad \frac{b^H}{H^c},\quad \frac{H^c}{\log H},\quad \log H$$

がどれも正の無限大であることを示す．まず，任意の実数 r に対して $e^r < H$ だから $r < \log H$，したがって $\log H$ は正の無限大である．

他の三つについては，その対数が正の無限大であることを示す．

(i) b より大きい整数 m に対し，

$$\log\left(\frac{H!}{b^H}\right)=\log 1+\cdots+\log(m-1)+\log m+\cdots+\log H-H\log b$$
$$>(H-m)\log m-H\log b=H(\log m-\log b)-m\log n.$$

$\log m>\log b$ だから $\log\left(\frac{H!}{b^H}\right)$ は正の無限大である．

（ⅱ）$\log\left(\frac{b^H}{H^c}\right)=H\log b-c\log H=H\left(\log b-c\frac{\log H}{H}\right).$

ド・ロピタルの規則によって $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ だから $\frac{\log H}{H}\approx 0$，したがって $\log\left(\frac{b^H}{H^c}\right)$ は正の無限大である．

（ⅲ）$K=\log H$ と置くと，

$$\log\left(\frac{H^c}{\log H}\right)=c\log H-\log(\log H)=K\left(c-\frac{\log K}{K}\right)$$

だから $\log\left(\frac{H^c}{\log H}\right)$ は正の無限大である．　⊣

つぎに数列の極限についての同値性定理を三つ挙げる．

定理 2　数列 $\langle a_n\rangle$ および実数 L についてのつぎの三条件は互いに同値である：

（ⅰ）$\lim_{n\to\infty} a_n=L.$

（ⅱ）ある無限大超整数 H を取ると，$K\geqq H$ なら $u_K\approx L.$

（ⅲ）ε-M 条件：任意の正実数 ε に対し，ある整数 M を取ると，$n\geqq M$ なら $|a_n-L|<\varepsilon.$

証明は節 5A の関数の極限に対する同値性定理の場合と同じである．

定理 3　つぎの三条件は互いに同値である：

（ⅰ）$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty.$

（ⅱ）ある無限大超整数 H を取ると，$K\geqq H$ なら a_K は正の無限大である．

（ⅲ）B-M 条件：任意の実数 B に対し，ある整数 M を取ると，$n\geqq M$ なら $a_n>B.$

定理 4　つぎの三条件は互いに同値である：

（ⅰ）数列 $\langle a_n\rangle$ は収束する．

（ⅱ）超実コーシー条件：任意の正の無限大超整数 H, K に対して $a_H\approx a_K.$

（iii） 実コーシー条件：任意の正実数 ε に対し，ある整数 M を取ると，$m, n \geqslant M$ なら $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

証明　（i）⇒（ii）$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ とすると，任意の正の無限大超整数 H, K に対して $a_H \approx L$, $a_K \approx L$, よって $a_H \approx a_K$.

（ii）⇒（iii） ある正実数 ε に対して実コーシー条件が成りたたないとする．すると，任意の $M \in \boldsymbol{N}^+$ は式系

$$m \in \boldsymbol{N}^+,\ \ n \in \boldsymbol{N}^+,\ \ M \leqslant m,\ \ M \leqslant n,\ \ |a_m - a_n| \geqslant \varepsilon$$

の部分実解である．そこで M_1 を無限大超自然数とする．部分解定理により，M_1 より大きいある超整数 H, K に対して $|a_H - a_K| \geqslant \varepsilon$ となり，（ii）に反する．

（iii）⇒（i） H を正の無限大超整数とする．仮定により，ある整数 M_1 を取ると，$m, n \geqslant M_1$ なら $|a_m - a_n| < 1$ となる．解の公理により，M_1 より大きい任意の整数 m に対して $|a_m - a_H| < 1$ が成りたつから a_H は有限である．そこで $L = st(a_H)$ と置く．数列が L に収束することを示す．与えられた正実数 ε に対して条件（iii）をみたす整数 M を取る．ふたたび解の公理により，M より大きい任意の超整数 n に対して $|a_n - a_H| < \varepsilon$ が成りたつ．特に，任意の無限大超自然数 K に対して $|a_K - a_H| < \varepsilon$ となる．ε は任意だから $a_K \approx a_H \approx L$ となり，結局 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ が成りたつ．　⊣

つぎに，超実数を使ってボルツァノ - ワイアストラスの定理および可算ハイネ - ボレルの定理を証明する．数列 $\langle a_n \rangle$ の**部分列**とは，f を $\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{N}$ への増加関数として，$\langle a_{f(n)} \rangle$ の形の数列のことである．

定理 5　H を正の無限大超整数とする．

（i） $st(a_H) = L$ ならば，$\langle a_n \rangle$ は L に収束する部分列をもつ．

（ii） a_H が正の無限大ならば，$\langle a_n \rangle$ は ∞ に発散する部分列をもつ．

証明　（i） 任意の正整数 n は式系

$$m \in \boldsymbol{N}^+,\ \ m \geqslant n,\ \ |a_m - L| < \frac{1}{n}$$

の部分超実解であり，したがって部分実解でもある．帰納法により，$f(n)$ を

$$f(n) > f(n-1), \qquad |a_{f(n)} - L| < \frac{1}{n}$$

をみたす最小の正整数として定義する．ε-δ 条件によって部分列 $\langle a_{f(n)} \rangle$ は L に収束する．

(ii) も (i) と同様にできる. ⊣

数列 $\langle a_n\rangle$ が**有界**とは，その値域 $\{a_n;\ n\in \boldsymbol{N}\}$ が有界のことである．節1D定理5により，$\langle a_n\rangle$ が有界なのは，任意の超自然数 H に対して a_H が有限な場合である.

ボルツァノ‐ワイヤストラスの定理　有界数列は収束部分列をもつ.

証明　$\langle a_n\rangle$ を有界数列，Hを正の無限大とする．仮定によって a_H は有限だから，前定理によって $st(a_H)$ に収束する部分列がある. ⊣

可算ハイネ‐ボレルの定理

$$X_0\supseteq X_1\supseteq\cdots\supseteq X_n\supseteq\cdots$$

を，$\boldsymbol{R}$ の空でない有界閉部分集合の下降列とする．このとき，$\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n\neq\emptyset$.

証明　実数の二項関係 $x\in X_n$ を $P(x,n)$ と書く．すると，任意の自然数 n に対して $X_n^*=\{x\in \boldsymbol{R}^*;\ P^*(x,n)\}$ である．無限大超自然数 H を一つ取って $X_H^*=\{x\in \boldsymbol{R}^*;\ P^*(x,H)\}$ と置く．X_n はどれも空でないから，部分解定理によって X_H^* も空でない．その一つの元 x を取る．解の公理により，$n\leqslant H$ なら $X_H^*\subseteq X_n^*$，したがって任意の自然数 n に対して $x\in X_n^*$ である．X_n は有界閉集合だから，x は有限で $st(x)\in X_n$，すなわち $st(x)\in\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$ が成りたつ. ⊣

定理6　増加数列は収束するか ∞ に発散するかのどちらかである.

証明　増加数列 $\langle a_n\rangle$ が ∞ に発散しないとする．すると，ある正の無限大超整数 H に対して a_H は正の無限大でない．一方 $a_H\geqslant a_0$ だから a_H は有限であり，定理5によって $L=st(a_H)$ に収束する部分列 $\langle a_{f(n)}\rangle$ が存在する．K を無限大超自然数とする．$f(0)$ より大きな任意の整数 n に対して，$f(m)\leqslant n<f(m+1)$ なる自然数 m が存在するから，部分解定理により，$f(M)\leqslant K\leqslant f(M+1)$ なる超自然数 M が存在する．M は無限大だから $a_{f(n)}\approx L\approx a_{f(n+1)}$．$\langle a_n\rangle$ は増加数列だから $a_{f(M)}\leqslant a_K\leqslant a_{f(M+1)}$，したがって $a_K\approx L$. ⊣

例　a_0, b_0を正実数とし，$a_1=\dfrac{a_0+b_0}{2}$，$b_1=\sqrt{a_0b_0}$，以下帰納的に

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\qquad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$$

と定義する．このとき，数列 $\langle a_n\rangle$, $\langle b_n\rangle$ は同じ極限値に収束する．実際，$n\geqslant 1$ なら $a_n\geqslant b_n$,

$a_{n+1} \leqq a_n$, $b_{n+1} \geqq b_n$ だから，$\langle a_n \rangle$ は増加数列で，a_1 によって上から押さえられる．したがって $\langle a_n \rangle$ は収束する．同様に $\langle b_n \rangle$ も収束する．$a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ で項別に $n \to \infty$ とすると，$\alpha=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，したがって $\alpha=\beta$ を得る．ただし，$\alpha=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，$\beta=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

練 習 問 題 9 A

つぎの数列の収束発散を調べ，収束のときは極限値を求めよ．

（1）$a_n=\sqrt[n]{n}$　（2）$a_n=\dfrac{n}{(\log n)^2}$　（3）$a_n=\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$

（4）$a_n=(1+n)^{\frac{1}{n}}$　（5）$a_n=\dfrac{n^n}{n!}$　（6）$a_n=(n!)^{\frac{1}{n}}$　（7）$a_n=\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

（8）$a_0=1$，$a_n=(1+a_{n-1})^{-1}$　$(n \geqq 1)$　（9）$a_0>0$，$a_n=\sqrt{3+a_{n-1}}$　$(n \geqq 1)$

9B 級　　数

無限数列

$$\langle a_n \rangle = a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

が与えられると，

$$S_n=a_1+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

によって**部分和数列** $\langle S_n \rangle$ が定義される．関数の公理により，任意の正の無限大超整数 H に対して**無限部分和**

$$S_H=a_1+\cdots+a_H=\sum_{k=1}^{H} a_k$$

が定義される．

定義　部分和数列 $\langle S_n \rangle$ が実数 S に収束するとき，すなわち

$$S=\lim_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n)$$

のとき，**無限級数** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は S に**収束する**と言い，

$$S=a_1+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

と書く．言いかえると，任意の正の無限大超整数 H に対して

$$S \approx a_1+\cdots+a_H$$

となることである．

部分和数列が発散するとき，級数は**発散する**と言う．

前節で扱った数列の極限に対する同値性定理は，級数の和に対する同値性定理に自動的に書きかえられる．特に，超実コーシー条件からつぎの定理が出る．ただし，$a_H+\cdots+a_K$ は $\sum_{n=1}^{K}a_n-\sum_{n=1}^{H-1}a_n$ を意味する．

定理 1　（i）級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するためには，$H\leqslant K$ なる任意の無限大超自然数 H, K に対して $a_H+\cdots+a_K\approx 0$ が成りたつことが必要十分である．

（ii）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束すれば $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

証明　（i）は超実コーシー条件そのものである．ここで $K=H$ とすれば $a_H\approx 0$ が得られ，(ii) が出る．　⊣

例 1　調和級数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ は発散する．実際，任意の正整数 n に対し，

$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\geqslant 2^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$$

だから，任意の無限大超整数 H に対しても，

$$\frac{1}{2^H+1}+\frac{1}{2^H+2}+\cdots+\frac{1}{2^{H+1}}\geqslant\frac{1}{2}$$

となり，これは無限小でない．したがって級数は発散する．

収束の比較判定法　$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ を正項級数，c を正の実数とする．あらゆる無限大の K に対して $a_K\leqslant cb_K$ が成りたつ場合，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ が収束すれば $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も収束する．

証明　H, K を無限大，$H\leqslant K$ とする．コーシー条件によって

$$b_H+\cdots+b_K\approx 0.$$

$$\therefore\quad 0\leqslant a_H+\cdots+a_K\leqslant c(b_H+\cdots+b_K)\approx 0,$$

$$\therefore\quad a_H+\cdots+a_K\approx 0.$$

⊣

例 2　$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^p}$　$(p>0)$．これを発散級数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ と比較する．H を正の無限大超整数とすると，定理 1 (iii) によって $\log H<H^{\frac{1}{p}}$．したがって $\frac{1}{(\log H)^p}>\frac{1}{H}$，したがって級数は発散する．

収束の積分判定法　f を連続な減小関数で，$x\geqslant 1$ に対して $f(x)>0$ なるものとする．このとき，変格積分

$$\int_1^{\infty}f(x)dx$$

と無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

とは，ともに収束するか，またはともに ∞ に発散するかのどちらかである．

証明　図から分るように，各 m に対して

$$\sum_{n=2}^{m} f(n) \leqq \int_1^m f(x)dx \leqq \sum_{n=1}^{m-1} f(n)$$

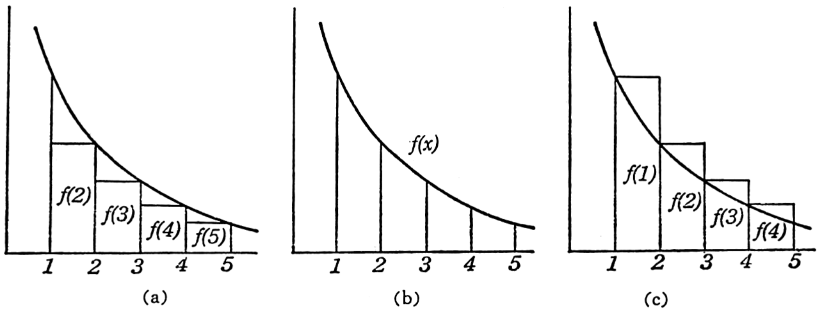


図 21

が成りたつ．節 6 C の定理 2 により，変格積分 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ は収束するか，または ∞ に発散する．$\int_1^{\infty} f(x)dx = S$ なら，無限大の H に対し，

$$\sum_{n=2}^{H} f(n) \leqq \int_1^H f(x)dx \approx S$$

だから級数 $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ は収束する．

$\int_1^{\infty} f(x) = \infty$ なら，

$$\int_1^H f(x)dx \leqq \sum_{n=1}^{H-1} f(n)$$

だから，$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ は ∞ に発散する．　⊣

例 3　級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は $p>1$ なら収束し，$p \leqq 1$ なら発散する．

証明　$p=1$ のときは例 1 ですんでいるが，つぎのようにしてもよい．

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{1}{x} dx = \lim_{u\to\infty} (\log u) = \infty.$$

$p \neq 1$ なら，

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{1}{x^p} dx = \lim_{u\to\infty} \frac{u^{1-p}-1}{1-p}.$$

この変格積分は $p>1$ なら収束し，$p<1$ なら ∞ に発散する（節 6 C の例 2）．

交項級数の収束判定法　交項級数

$$a_1-a_2+a_3-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,\quad a_n>0$$

は，つぎの二条件がみたされれば収束する：

（i）a_n は真に減小する： $a_1>a_2>\cdots>a_n>\cdots$

（ii）$\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

しかも，その和を S とすると，任意の n に対して

$$S_{2n}<S<S_{2n+1}$$

が成りたつ．ただし，S_m は部分和 $\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n+1}a_n$ である．

証明　簡単に分るように，

$$S_2<S_4<\cdots<S_{2n}<\cdots$$
$$S_1>S_3>\cdots>S_{2n+1}>\cdots$$

が成りたち，しかも任意の n に対して

$$S_{2n}=S_{2n-1}-a_{2n}<S_{2n-1}<S_1$$

である．定理 6 により，有界増加数列 $S_2, S_4, \cdots, S_{2n}, \cdots$ は収束する．その極限を S とする．したがって，任意の正の無限大超整数 H に対し，$S_{2H}\approx S$. 一方，条件（ii）によって $a_{2H+1}\approx 0$. だから

$$S_{2H+1}=S_{2H}+a_{2H+1}\approx S$$

となる．したがって $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ となる．最後の不等式は明らか．　⊣

例 4　交項級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots$$

は収束する．実はこの和は log 2 になることが分る（問題 9 D-5 (1)）．

定義　級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が**絶対収束**するとは，その絶対値級数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束することである．

定理 2　絶対収束級数は収束する．

証明　$H\leqslant K$ なる任意の無限大超自然数 H, K に対し，

$$|a_H+a_{H+1}+\cdots+a_K|\leqslant|a_H|+|a_{H+1}|+\cdots+|a_K|$$

が成りたつ．定理 1 によって右辺は無限小，したがって左辺も無限小である．ふたたび定理 1 によって $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する．　⊣

定理 3　絶対収束級数は，項の順序を変えてもやはり絶対収束し，同じ和をもつ．

証明　1) 正項，負項の一方が有限個しかないとき．このときはもともと $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が正項級数だとしてよい．項を並べかえた級数を $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ とする．無限大超自然数 H に対し，$b_1, \cdots, b_H$ のうち，もとの順番で最後にあるものが $a_{H'}$ だとすると，

$$\sum_{n=1}^{H} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{H'} a_n \approx S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

したがって $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束し，その和 T は S を超えない．$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ との役割を交換すれば $T \leqslant S$ となるから $T=S$ が成りたつ．

2) 正項，負項とも無限個ある場合．正項だけをもとの順で並べたものを $p_1, p_2, \cdots$ とし，負項の絶対値をもとの順で並べたものを $q_1, q_2, \cdots$ とする．正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ はともに $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ で押えられるから収束する．その和を P, Q とする．無限大超自然数 H に対し，ある無限大超自然数 H_P, H_Q を取ると

$$\sum_{n=1}^{H} a_n = \sum_{n=1}^{H_P} p_n - \sum_{n=1}^{H_Q} q_n$$

と書ける．

$$S \approx \sum_{n=1}^{H} a_n = \sum_{n=1}^{H_P} p_n - \sum_{n=1}^{H_Q} q_n \approx P - Q$$

したがって $S=P-Q$ となる．

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を並べかえた級数を $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ とする．その絶対値級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a'_n|$ は $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ と並べかえたものだから，1) によって収束する．定理 2 によって $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ は収束する．これの正項を $p'_1, p'_2, \cdots$，負項を $q'_1, q'_2, \cdots$ とすれば，やはり

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n = \sum_{n=1}^{\infty} p'_n - \sum_{n=1}^{\infty} q'_n = P' - Q'$$

が成りたつ．$\sum_{n=1}^{\infty} p'_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} q'_n$ はそれぞれ $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ を並べかえたものだから，1) によって $P'=P$, $Q'=Q$. したがって $S'=S$ となる．　⊣

項の比による収束判定法　級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ において，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \quad (L \text{ は実数または } \infty)$$

とする．

（i） $L<1$ なら級数は絶対収束する．

（ii） $L>1$ なら級数は発散する．

証明　（i） $L<b<1$ なる b を取る．ε-N 条件により，ある N を取ると，

$$\frac{|a_{N+1}|}{|a_N|},\quad \frac{|a_{N+2}|}{|a_{N+1}|},\quad \cdots,\quad \frac{|a_{N+k+1}|}{|a_{N+k}|},\quad \cdots$$

はすべて b より小さい．そこで $c=|a_N|$ とすると，

$$|a_{N+1}|<cb,\quad |a_{N+2}|<cb^2,\quad \cdots,\quad |a_{N+k}|<cb^k,\quad \cdots$$

となる．等比級数 $\sum_{k=1}^{\infty} b^k$ は収束するから，比較判定法によって $\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|$ も収束し，したがって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する．

（ii） 上と同様に，ある N を取ると，

$$\frac{|a_{N+1}|}{|a_N|},\quad \frac{|a_{N+2}|}{|a_{N+1}|},\quad \cdots,\quad \frac{|a_{N+k+1}|}{|a_{N+k}|},\quad \cdots$$

はすべて1より大きい．したがって

$$|a_N|<|a_{N+1}|<\cdots<|a_{N+k}|<\cdots$$

となり，数列 $\langle a_n\rangle$ は0に収束しない．定理1の（ii）によって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．　⊣

例5

（a） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ は収束する．実際，$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$

（b） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^n}{n!}$ は発散する．実際，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1.$$

（c） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の場合は，項の比の極限はともに1だから，この判定法は適用できない．実際には例により，$\sum\frac{1}{n}$ は発散し，$\sum\frac{1}{n^2}$ は収束する．

練習問題9B

つぎの級数の収束発散を判定せよ．

（1） $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n^3}$　（2） $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$　（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

（4） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n}$　（5） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$　（6） $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{3^n+4^n}$　（7） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$

(8) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$　(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log(n^2+1)}$　(10) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$

(11) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right)$　(12) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n!}$　(13) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

(14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{n^2}$　(15) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$　(16) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$　(18) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$　(19) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\log n}}$

(20) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}$　(21) $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n}$

9C テイラーの公式と高階の微分

テイラーの公式　実関数 f が，c と x との間のあらゆる t で $f^{(n)}(t)$ をもつならば，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k+\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

と書ける．ただし，t は c と x との間のある実数である．

証明

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k,\qquad R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

と置く．簡単に分るように，$0\leqslant k\leqslant n$ なる k に対して $f^{(k)}(c)=P_n^{(k)}(c)$ が成りたつから，

$$R_n(c)=R_n'(c)=\cdots=R_n^{(n)}(c)=0$$

となる．一方，$G(x)=(x-c)^{n+1}$ と置くと，明らかに

$$G(c)=G'(c)=\cdots=G^{(n)}(c)=0$$

が成りたつ．ここで一般平均値定理（節5B）を $n+1$ 回使う．まず c と x との間のある t_0 に対し，

$$\frac{R_n''(t_0)}{G''(t_0)}=\frac{R_n(x)-R_n(c)}{G(x)-G(c)}=\frac{R_n(x)}{G(x)}$$

が成りたつ．つぎに，c と t_0 との間のある t_1 に対して

$$\frac{R_n''(t_1)}{G''(t_1)}=\frac{R_n'(t_0)}{G'(t_0)}$$

が成りたつ．この操作をくり返すと，$n+1$ 回目には，c と t_{n-1} との間のある t_n に対して

$$\frac{R_n^{(n+1)}(t_n)}{G^{(n+1)}(t_n)}=\frac{R_n^{(n)}(t_{n-1})}{G^{(n)}(t_{n-1})}$$

が成りたつことになる．$R_n^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)$，$G^{(n+1)}(t)=(n+1)!$ だから，

$$\frac{f^{(n+1)}(t_n)}{(n+1)!}=\frac{R_n(x)}{(x-c)^{n+1}}$$

を得る．もちろん，t_n は c と x との間にある．　⊣

部分解定理を使うと，無限小にかかわるつぎの系が得られる．

系 1　n 階導関数 $f^{(n)}$ が実数 c で連続とする．$x\approx c$，$\Delta x\approx 0$，$\Delta x\neq 0$ なら，

$$(x+\Delta x)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\Delta x^k\quad(\Delta x^n \text{ に比べて})$$

が成りたつ．

証明　$t\approx c$ なら $f^{(n)}(t)$ は定義されている．テイラー公式に部分解定理を使って，x と $x+\Delta x$ の間の超実数 t で，

$$f(x+\Delta x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\Delta x^k+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}\Delta x^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\Delta x^k+\frac{f^{(n)}(t)-f^{(n)}(x)}{n!}\Delta x^n$$

となるものが存在する．連続性によって $f^{(n)}(t)-f^{(n)}(x)\approx 0$.　⊣

テイラー公式の証明を修正することによって，$f^{(n)}(c)$ の存在だけを仮定して $x=c$ で系 1 が成りたつことが証明できる．

定理 2　実数 c で $f^{(n)}(c)$ が存在すれば，任意の 0 でない無限小 Δx に対して

$$f(c+\Delta x)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}\Delta x^k\qquad(\Delta x^n \text{ に比べて})$$

が成りたつ．

証明　$f^{(n)}(c)$ が存在するのだから，c のある近傍のあらゆる点 x に対して $f^{(n-1)}(x)$ が存在する．

$$F(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k,$$

$$G(x)=(x-c)^n$$

と置く．$m<n$ なら $F^{(m)}(c)=G^{(m)}(c)=0$ である．節 5B の一般平均値定理を $n-1$ 回使うと，

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F^{(n-1)}(t)}{G^{(n-1)}(t)}$$

となる t が c と x の間に存在する．ところが，

$$\frac{F^{(n-1)}(t)}{G^{(n-1)}(t)}=\frac{f^{(n-1)}(t)-f^{(n-1)}(c)}{n!(t-c)}-\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

だから，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k+\frac{f^{(n-1)}(t)-f^{(n-1)}(c)}{n!(t-c)}(x-c)^n$$

が成りたつ．部分解定理により，c と $c+\varDelta x$ の間の超実数 t_1 で，

$$f(c+\varDelta x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}\varDelta x^k+\frac{f^{(n-1)}(t_1)-f^{(n-1)}(c)}{n!(t_1-c)}\varDelta x^n$$

となるものが存在する．仮定によって

$$f^{(n)}(c)\approx\frac{f^{(n-1)}(t_1)-f^{(n-1)}(c)}{t_1-c}$$

だから求める結果を得る．　⊣

$n=1$ のときはこれは節2Aの増分定理である：

$$f(c+\varDelta x)\approx f(c)+f'(c)\varDelta x \qquad (\varDelta x \text{ に比べて}).$$

増分定理を別のやりかたで一般化すると，n 階の増分という概念が現われる．

定義　$y=f(x)$ が区間 I で定義されているとする．**n 階の増分**

$$\varDelta^n y=\varDelta^n f(x,\varDelta x)$$

を，つぎのように帰納的に定義する：

$$\varDelta^1 y=\varDelta^1 f(x,\varDelta x)=f(x+\varDelta x)-f(x),$$

$$\varDelta^{n+1}=\varDelta^{n+1}f(x,\varDelta x)=\varDelta^n f(x+\varDelta x,\varDelta x)-\varDelta^n f(x,\varDelta x).$$

こうして，$x, x+n\varDelta x\in I$ ならば $\varDelta^n f(x,\varDelta x)$ が定義される．$n=2$ なら，

$$\begin{aligned}\varDelta^2 y&=[f(x+2\varDelta x)-f(x+\varDelta x)]-[f(x+\varDelta x)-f(x)]\\&=f(x+2\varDelta x)-2f(x+\varDelta x)+f(x).\end{aligned}$$

$n=3$ なら

$$\varDelta^3 y=f(x+3\varDelta x)-3f(x+2\varDelta x)+3f(x+\varDelta x)-f(x).$$

一般には帰納法によって

$$\varDelta^n y=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+k\varDelta x)$$

と書けることが分る．ただし，$\binom{n}{k}$ は二項係数：

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

つぎの定理は n 階増分 $\Delta^n y$ と n **階微分** $d^n y=f^{(n)}(x)dx^n$ とを結びつける．

定理 3　　$y=f(x)$ を実関数，c を実数，Δx を 0 でない無限小とする．

（i）$f^{(n)}$ が c で連続なら，c に無限に近い任意の超実数 x において

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}\approx\frac{d^n y}{dx^n}$$

が成りたつ．すなわち，

$$\Delta^n f(x, \Delta x)\approx f^{(n)}(x)\Delta x^n \qquad (\Delta x^n \text{ に比べて})$$

（ii）$f^{(n)}(c)$ が存在すれば，$x=c$ において

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}\approx\frac{d^n y}{dx^n}$$

が成りたつ．すなわち，

$$\Delta^n f(c, \Delta x)\approx f^{(n)}(c)\Delta x^n \qquad (\Delta x^n \text{ に比べて}).$$

証明　　$\Delta x>0$ の場合を考える．

1°　まず平均値の定理をつぎのように一般化する：

“$u, \Delta u$ を実数とし，$u\leqq t\leqq u+m\Delta u$ に対して $g^{(m)}(t)$ が存在するとする．このとき，ある $t_1\in(u, u+m\Delta u)$ に対して

$$\Delta^m g(u, \Delta u)=g^{(m)}(t_1)\Delta u^m \qquad (*)$$

が成りたつ．”

これを帰納法で証明する．$m=1$ ならこれは平均値の定理そのものである：

$$g(u+\Delta u)-g(u)=g'(t)\Delta u.$$

$m-1$ の場合を仮定し，$h(t)=g(t+\Delta u)-g(t)$ と置く．

$$h^{(m-1)}(t)=g^{(m-1)}(t+\Delta u)-g^{(m-1)}(t)$$

が $u\leqq t\leqq u+(m-1)\Delta u$ に対して成りたつから，ある $t_0\in(u, u+(m-1)\Delta u)$ に対して

$$\Delta^{m-1}h(u, \Delta u)=h^{(m-1)}(t_0)\Delta u^{m-1}$$

が成りたつ．一方

$$\Delta^{m-1}h(u, \Delta u)=\Delta^m g(u, \Delta u)$$

だから，平均値の定理により，ある $t_1\in(t_0, t_0+\Delta u)$ に対して

$$h^{(m-1)}(t_0)=g^{(m-1)}(t_0+\Delta u)-g^{(m-1)}(t_0)=g^{(m)}(t_1)\Delta u$$

が成りたつ．したがって

$$\Delta^m g(u, \Delta u)=g^{(m)}(t_1)\Delta u^m$$

となって (*) が証明された．

2°　つぎに (i) を証明する．$f^{(n)}$ は c で連続だから，$x\leqq t\leqq x+n\Delta x$ に対して $f^{(n)}(t)$ は定義されている．(*) と部分解定理により，ある $t_1\in(x, x+n\Delta x)$ に対して

$$\frac{\Delta^n f(x, \Delta x)}{\Delta x^n}=f^{(n)}(t_1)$$

が成りたつ．$t_1\approx x\approx c$ だから

$$\frac{\Delta^n f(x, \Delta x)}{\Delta x^n}\approx f^{(n)}(x)$$

となる．

3°　(ii) の証明．$m=n-1$ とし，$g(t)=f(t+\Delta x)-f(t)$ と置く．(*) および部分解定理により，ある $t_1\in(c, c+(n-1)\Delta x)$ に対して

$$\Delta^{n-1}g(c, \Delta x)=g^{(n-1)}(t_1)\Delta x^{n-1}$$

が成りたつ．これを書きかえると，

$$\Delta^n f(c, \Delta x)=\frac{f^{(n-1)}(t_1+\Delta x)-f^{(n-1)}(t_1)}{\Delta x}\Delta x^n$$

となる．$t_2=t_1+\Delta x$ と置くと，$t_1\approx c$，$t_2\approx c$ だから，

$$\begin{aligned}\frac{\Delta^n f(c, \Delta x)}{\Delta x^n}&=\frac{f^{(n-1)}(t_2)-f^{(n-1)}(t_1)}{\Delta x}\\&=\frac{f^{(n-1)}(t_2)-f^{(n-1)}(c)}{t_2-c}\cdot\frac{t_2-c}{\Delta x}+\frac{f^{(n-1)}(c)-f^{(n-1)}(t_1)}{c-t_1}\cdot\frac{c-t_1}{\Delta x}\\&\approx f^{(n)}(c)\cdot st\left(\frac{t_2-c}{\Delta x}\right)+f^{(n)}(c)\cdot st\left(\frac{c-t_1}{\Delta x}\right)=f^{(n)}(c)\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\frac{\Delta^n f(c, \Delta x)}{\Delta x^n}\approx f^{(n)}(c)$$

が成りたつ．　⊣

9D　巾 級 数

定義　変数 x を含む級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

をxの**巾（ベキ）級数**または**整級数**と言う．

定理 1　1）巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x=u$ で収束すれば，$|x|<|u|$ なるあらゆるxで絶対収束する．

2）$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ が $x=u$ で発散すれば，$|x|>u$ なるあらゆるxで発散する．

証明　1）$|v|<|u|$ とし，$b=\dfrac{|v|}{|u|}$ と置く．$0\leqslant b\leqslant 1$ だから等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ は収束する．仮定により，正の無限大Hに対して $a_H u^H \approx 0$．したがって

$$|a_H v^H| = |a_H u^H| b^H \leqslant b^H$$

となり，比較判定法によって $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n v^n|$ は収束する．

2）は 1）からすぐ出る．　⊣

系　巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について，つぎの三つの場合のどれかが必ず起る．

（i）$x=0$ 以外では発散する．

（ii）あらゆる実数xに対して収束する．

（iii）0でない実数rが存在し，$|x|<r$ で収束し，$|x|>r$ で発散する．端点 $-r, r$ では収束することも発散することもある．

定義　上の系のrを巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の**収束半径**と言う．ただし，（i）の場合は $r=0$,（ii）の場合は $r=\infty$ と置く．

例 1　（i）$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$．項の比を取ると，$x\neq 0$ なら

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)x^{n+1}|}{|n! x^n|} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty.$$

したがって収束半径は 0，収束域は $\{0\}$ である．

（ii）$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$．　$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|x|}{n+1} = 0$．したがって収束半径は ∞，収束域は $\boldsymbol{R}=(-\infty,\infty)$ である．

（iii-a）$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$．これは等比級数だから収束半径は 1，収束域は $(-1,1)$ である．

（iii-b）$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$．$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\left|\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\dfrac{x^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}|x| = |x|$．したがって収束半径は 1 であ

る．$x=1$ なら調和級数で発散，$x=-1$ なら交項調和級数で収束，したがって収束域は $[-1,1)$ である．

(iii-c)　$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$．$\lim\dfrac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right|}{\left|\frac{x^n}{n^2}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2|x|=|x|$．したがって収束半径は1である．$x=1$ なら節9B例3によって収束，$x=-1$ なら節9B定理2によって収束，したがって収束域は $[-1,1]$ である．

巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は，その収束域を定義域とする実関数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ を定める．

定理2　$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径を $r>0$ とする．

(i)　f は項別微分可能である．すなわち，$-r<x<r$ に対して

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

(ii)　f は項別積分可能である．すなわち，$-r<x<r$ に対して

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

(iii)　巾級数 (i), (ii) の収束半径はともに r である．

証明　(iii), (ii), (i) の順に証明する．

(iii)　$|x|<r$ とする．$|x|<c<r$ なる実数 c を取る．H を正の無限大とすると，節9A定理1の (ii) により，$\dfrac{\left|\frac{c}{x}\right|^H}{H}$ は正の無限大，したがって $H\left|\frac{x}{c}\right|^H$ は無限小である．

$$|Ha_Hx^{H-1}|=H\left|\frac{x}{c}\right|^H\left|\frac{1}{x}a_Hc^H\right|<|a_Hc^H|$$

だから，比較判定法によって $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ は絶対収束する．まったく同じ論法によって $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ も絶対収束する．

つぎに $|x|>r$ とすると，同じ判定法によって (i), (ii) ともに発散することが分る．したがって収束半径は (i), (ii) ともに r である．

(ii)　$0<c<r$ とする．$\sum_{n=0}^{\infty}a_nc^n$ は絶対収束するから，$E_m=\sum_{n=m+1}^{\infty}|a_n|c^n$ と置くと，$\lim_{m\to\infty}E_m=0$ となる．さらに，$|t|\leqq c$ なる t に対して

$$\left|f(t)-\sum_{n=0}^{m}a_nt^n\right|=\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}a_nt^n\right|\leqq\sum_{n=m+1}^{\infty}|a_nt^n|\leqq E_m$$

が成りたつ．f が $[-c, c]$ で連続であることを示すために，u を t に無限に近い超実数とする．任意の m に対し，

$$\left|\sum_{n=0}^{m} a_n t^n - \sum_{n=0}^{m} a_n u^n\right| \approx 0, \qquad \left|\sum_{n=0}^{m} a_n u^n - f(u)\right| \leqslant E_m$$

だから，前の式と合わせて

$$st|f(t)-f(u)| \leqslant E_m + 0 + E_m$$

を得る．m は任意であり，$\lim_{m\to\infty} E_m = 0$ だから $f(t) \approx f(u)$ となる．すなわち f は $[-c, c]$ で連続である．c は $|c| \leqslant r$ なるかぎり任意だったから，f は $(-r, r)$ で連続である．

つぎに，$0<x<r$ として

$$-E_m \leqslant f(t) - \sum_{n=0}^{m} a_n t^n \leqslant E_m$$

各辺を 0 から x まで積分すれば，

$$-E_m x \leqslant \int_0^x f(t)dt - \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \leqslant E_m x$$

を得る．$\lim_{m\to\infty} E_m = 0$ だから，

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

となる．$0>x>-r$ の場合も同様である．これで (ii) が示された．

（i） $g(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ の収束半径は r だから，(ii) によって項別積分すれば，

$$\int_0^x g(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - f(0)$$

だから，微積分の基本定理によって $g(x) = f'(x)$ となる．　⊣

例 2　（i） $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots, \quad |x|<1$

（ii） $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \quad |x|<1$

（iii） $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty<x<\infty.$

証明　(i) は等比級数であり，$\sum_{n=0}^{m} (-1)^n x^n = \frac{1-(-x)^{m+1}}{1+x}$．$|x|<1$ ならこれは $\frac{1}{1+x}$ に収束する．

（ii） (i) の両辺を 0 から x まで積分すればよい．

（iii） $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ の収束半径は ∞ である（例 1 の (ii)）．これを項別微分すると

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=f(x).$$

$g(x)=f(x)e^{-x}$ と置くと，$g'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=0$．したがって $g(x)=C$ (定数)，$C=g(0)=f(0)=1$ だから $f(x)=e^x$．　⊣

定義　関数 f が c で何回でも微分可能のとき，$x-c$ の巾級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

を f の c での**テイラー級数**と言う．特に $c=0$ の場合の巾級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

を f の**マクローリン級数**と言う．

テイラー級数は $x\fallingdotseq c$ に対して収束するとは限らないし，たとえ収束してもその和が $f(x)$ に一致するとは限らない．例 2 の三つの級数はそれぞれ左辺の関数のマクローリン級数であり，それが適当な範囲で収束してもとの関数と一致する例である．関数をそのテイラー級数（特にマクローリン級数）で表わすことができるとき，これを**テイラー展開**，特に**マクローリン展開**と言う．例 2 の (i), (ii) の場合，左辺の関数はもっと広い範囲で定義されているが，右辺のマクローリン展開ができるのは，その級数の収束域に限る．

定理 3　$x=c$ で何回でも微分できる関数 $f(x)$ の c でのテイラー級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ が $f(x)$ と一致するためには，テイラーの公式 (節 9 C) の残項

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

（t は x と c との間のある実数で，n によって変る）が，$n\to\infty$ のとき 0 に収束することが必要十分である．

証明　あきらか．　⊣

例 3　(i)　$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

(ii)　$(1+x)^p=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n$

$$=1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3+\cdots,\quad |x|<1.$$

証明　(i)　$\sin x$ の m 階導関数の0での値は，$m=2n$ なら0，$m=2n+1$ なら $(-1)^n$ だから，そのマクローリン級数は $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ である．簡単に分るように，この巾級数の収束半径は ∞ である．マクローリン公式の残項は，

$$|R_{2n-1}(x)|=|R_{2n}(x)|=\left|\frac{\sin^{(2n+1)}t}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right|\leqq\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

だから，任意の x に対して $n\to\infty$ のとき0に収束する．

$\cos x$ は $\sin x$ のマクローリン展開を項別に微分すればよい．

(ii)　$(1+x)^p$ の n 階導関数の0での値は $p(p-1)\cdots(p-n+1)$ だから，そのマクローリン級数は $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n$ である．項の比を作ると，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{|p-n|}{n+1}|x|$$

だから，$|x|<1$ なら収束する（特に p が正整数なら級数は有限級数であり，したがってあらゆる x で収束し，もとの多項式にほかならない）．

今度はマクローリン残項の評価はうまく行かない．e^x の場合の真似をする．

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n,\quad |x|<1$$

と置く．これを項別に微分すると

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(p-1)\cdots(p-n)}{n!}x^n$$

となるから，

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x)=f'(x)+xf'(x)&=p+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)(p-n+n)}{n!}x^n\\&=p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n=pf(x)\end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{(1+x)^p}\right]=\frac{f'(x)(1+x)-pf(x)}{(1+x)^{p+1}}=0$$

となり，$f(x)=C(1+x)^p$（C は定数）でなければならない．$1=f(0)=C$ だから望みの結果が得られる．　⊣

定理4　関数 $f(x)$ が正の収束半径をもつ巾級数の和として

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$$

と表わされるならば，この級数は f の c でのテイラー級数にほかならない．すなわち，$a_n=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$．

証明　両辺を n 回微分して $x=c$ と置けばよい．　⊣

例4　e^{x^2} のマクローリン展開を求めるときに，e^{x^2} を n 回微分しようとすると複雑になる．しかし，$e^y=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}y^n$ の y に x^2 を代入すれば $e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^{2n}$ が得られる．

前定理によってこれは e^{x^2} のマクローリン展開である．

練習問題 9 D

1. つぎの巾級数の収束半径を求め，できれば両端での収束発散を判定せよ．

（1） $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}\,x^n$　（2） $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}x^n$　（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}x^n$

（4） $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{\log n}$　（5） $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{(\log n)^n}$　（6） $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{x^n}{(\log(\log n))^n}$

（7） $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n!}$　（8） $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)x^n$

2. つぎの関数をマクローリン展開し，収束域を定めよ．

（1） $\dfrac{1}{1+x^2}$　（2） $\arctan x$　（3） e^{-x^2}　（4） $\arctan(4x^2)$

（5） $\displaystyle\int_0^x e^{t^3}dt$　（6） $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{x} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$　（7） $\dfrac{2x}{1+x^4}$　（8） $\log\dfrac{1+x}{1-x}$

（9） $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$　（10） $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　（11） $\arcsin x$　（12） $\cos\sqrt{x}$

（13） $\dfrac{x}{(1+x)^4}$　（14） $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$　（15） $\displaystyle\int_0^x \frac{\arcsin t}{t}dt$

3. 巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を r とするとき，つぎのことを証明せよ．

（1） $b>0$ のとき，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(bx)^n$ の収束半径は $\dfrac{r}{b}$ である．

（2） $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ の収束半径は $\sqrt{r}$ である．

4. （1） $\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ および $\arctan x$ のマクローリン展開を使って，π の値を小数第2位まで［適当な計算機があれば第5位まで，以下同様］求めよ．

（2） e^{-1} を小数第2位まで［第5位まで］求めよ．

（3） $\log\dfrac{1}{2}$ の展開を使って $\log 2$ を小数第2位まで［第5位まで］求めよ．

5. $\dfrac{1}{1+x}=1-x+\cdots+(-1)^n x^n+\dfrac{(-x)^{n+1}}{1+x}$ を使ってつぎの等式を証明せよ．

（1） $\log 2=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots$

（2） $\dfrac{\pi}{4}=\arctan 1=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\cdots$

6. $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ は何回でも微分でき，$f^{(n)}(0)=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$ である．したがってマクローリン級数が作れ，それは $\sum_{n=0}^{\infty} 0\cdot x^n$ だからいたるところ収束する．しかしこれは $f(x)$ を表わさない．

10　ベ　ク　ト　ル

10 A　超実ベクトル

正整数 n を固定する．n 個の実数の組 $\langle r_1, \cdots, r_n\rangle$ を n 次元ベクトルと言う．この幾何学的な意味はつぎのとおりである．$\boldsymbol{R}^n$ の二点

$$P=\langle p_1, \cdots, p_n\rangle, \qquad Q=\langle q_1, \cdots, q_n\rangle$$

の順序対 $\overrightarrow{PQ}$ を P から Q までの**有向線分**と言う．$\overrightarrow{PQ}$ の**成分**とは，

$$\langle q_1-p_1, \cdots, q_n-p_n\rangle$$

の成分のことである．二つの有向線分の対応する成分がすべて一致するとき，それらは互いに**同値**であると言う．そしてその同値類が**ベクトル**ということになる．ベクトル $\boldsymbol{A}$ が $\overrightarrow{PQ}$ を含む同値類であるとき，$\boldsymbol{A}$ を P **から** Q **へのベクトル**と言う．また，$\overrightarrow{PQ}$ の成分を $\boldsymbol{A}$ の成分と言う．

第 m 成分が 1 で他はすべて 0 であるようなベクトルを $\boldsymbol{j}_m$ と書く．$\boldsymbol{j}_1, \cdots, \boldsymbol{j}_n$ を**基底ベクトル**と言う．ベクトルの**和** $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ および**スカラー倍** $c\boldsymbol{A}$ は成分ごとに和，スカラー倍を作ることによって定義される．すると，$\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ を成分とするベクトル $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{j}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{j}_n$$

と書ける．n 次元のゼロベクトルを $\mathbf{0}$ と書く．

内積および**長さ**はそれぞれつぎの式で定義される：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n,$$
$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}.$$

n 次元の**超実ベクトル**も同様に定義される．関数の公理と解の公理とにより，n 次元超実ベクトルの全体は超実数体 $\boldsymbol{R}^*$ 上の内積つき線型空間を作る．すなわち，ベクトルの和，スカラー倍および内積に関する代数的諸法則をみたす．こうして，超実ベクトル $\boldsymbol{A}$ はその長さ $|\boldsymbol{A}|\in\boldsymbol{R}^*$ および単位ベクトル $\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$ によって分類されることになる．

定義　超実ベクトル $\boldsymbol{A}$ は，その長さ $|\boldsymbol{A}|$ が無限小，有限，無限大であるのに従って**無限小**，**有限**，**無限大**であると言う．$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$ が無限小のとき，$\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{B}$ に**無限に近い**と言い，$\boldsymbol{A}\approx\boldsymbol{B}$ と書く．$\boldsymbol{A}$ の**単子**および**銀河**はそれぞれ

$$\text{moand}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{B};\ \ \boldsymbol{B}\approx\boldsymbol{A}\},$$

$$\text{galaxy}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{B};\ \ \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\ \text{が有限}\}$$

によって定義される．特に，monad $(\boldsymbol{0})$ は無限小ベクトルの全体，galaxy $(\boldsymbol{0})$ は有限ベクトルの全体である．

命題 1　(i)　$\boldsymbol{A}$ が無限小 $\Longleftrightarrow\boldsymbol{A}$ の各成分が無限小．

(ii)　$\boldsymbol{A}$ が有限 $\Longleftrightarrow\boldsymbol{A}$ の各成分が有限．

(iii)　$\boldsymbol{A}$ が無限大 $\Longleftrightarrow\boldsymbol{A}$ の少なくとも一つの成分が無限大．

(iv)　$\boldsymbol{A}\approx\boldsymbol{B}\Longleftrightarrow a_1\approx b_1,\cdots,a_n\approx b_n$

証明　どれも不等式

$$|a_m|\leqslant\sqrt{a_1^2+\cdots+a_m^2}\leqslant|a_1|+\cdots+|a_m|$$

から簡単に出る．　⊣

命題 2　monad $(\boldsymbol{0})$ および galaxy $(\boldsymbol{0})$ は，ベクトルの加法および有限スカラー倍で閉じている．

証明　前命題および超実数の monad (0)，galaxy (0) が加法と有限倍とで閉じているという事実 (節 1 A の定理 1, 定理 3) とから出る．　⊣

定義　有限超実ベクトル $\boldsymbol{A}$ の**標準部分** $st(\boldsymbol{A})$ を

$$st(\boldsymbol{A})=st(a_1)\boldsymbol{j}_1+\cdots+st(a_n)\boldsymbol{j}_n$$

として定義する．これは $\boldsymbol{A}$ に無限に近い唯一つの実ベクトルである．

つぎの結果は命題 1 からすぐ出る．

命題 3　写像 st はベクトルの和，有限スカラー倍，内積，長さを保つ．すなわち，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ が有限ベクトル，c が有限超実数なら，

$$st(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=st(\boldsymbol{A})+st(\boldsymbol{B}).$$

$$st(c\boldsymbol{A})=st(c)\cdot st(\boldsymbol{A}).$$

$$st(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=st(\boldsymbol{A})\cdot st(\boldsymbol{B}).$$

$$st(|\boldsymbol{A}|)=|st(\boldsymbol{A})|.$$

定義　$|\boldsymbol{A}|$ が実数のとき，$\boldsymbol{A}$ は**実の長さ**をもつと言う．$\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{0}$ でなく，単位ベクトル $\boldsymbol{U}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$ が実ベクトルのとき，$\boldsymbol{A}$ は**実方向**をもつと言う．

命題 4　$\boldsymbol{A}$ が実ベクトルであるのは，その長さも方向も実の場合である．

証明　$\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$ から明らか．　⊣

定義　0 でない二つのベクトル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ の単位ベクトル $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$ が等しいかまたは反対向きのとき，すなわち $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}$ または $\boldsymbol{U}=-\boldsymbol{V}$ のとき，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ とは平行であると言う．また，$\boldsymbol{U}\approx\boldsymbol{V}$ または $\boldsymbol{U}\approx-\boldsymbol{V}$ のとき，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ とは**ほとんど平行**であると言う．

命題 5　0 でない任意の超実ベクトルはある実ベクトルにほとんど平行である．

証明　$\boldsymbol{A}$ の単位ベクトル $\boldsymbol{U}$ は有限だからその標準部分 $\boldsymbol{V}=st(\boldsymbol{U})$ がある．$|\boldsymbol{V}|=|st(\boldsymbol{U})|=st(\boldsymbol{U})=1$ だから $\boldsymbol{V}$ は単位ベクトルであり，$\boldsymbol{U}\approx\boldsymbol{V}$ だから $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{V}$ にほとんど平行である．　⊣

《ほとんど平行》という概念は，任意有限個のベクトルの場合につぎのように一般化される．k 個の実ベクトルの組 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ が $\boldsymbol{R}$ **上線型従属**であるとは，少なくとも一つは 0 でない k 個の実数 $c_1,\cdots,c_k$ で，

$$c_1\boldsymbol{A}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

となるものが存在することである．同様に，k 個の超実ベクトルの組 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ が $\boldsymbol{R}^*$ **上線型従属**であるとは，少なくとも一つは 0 でない k 個の超実数 $c_1,\cdots,c_k$ で (1) を成立させるものが存在することである．最後に，k 個の超実ベクトルの組 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ が $\boldsymbol{R}$ **上ほとんど線型従属**であるとは，ある $\boldsymbol{A}_m$ が $\boldsymbol{0}$ であるか，または少なくとも一つは 0 でない k 個の**実数** $c_1,\cdots,c_k$ で

$$c_1\boldsymbol{U}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{U}_k\approx\boldsymbol{0}$$

なるものが存在することである．ただし，$\boldsymbol{U}_m$ は $\boldsymbol{A}_m$ の単位ベクトルである．

《ほとんど線型従属》という概念は，ベクトルの方向だけに関する概念である．実際，どれも $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ が $\boldsymbol{R}$ 上ほとんど線型従属なのは，単位実ベクトル $st(\boldsymbol{U}_1),\cdots,st(\boldsymbol{U}_k)$ が $\boldsymbol{R}$ 上線型従属のときである．特に $k=2$ の場合には，《線型従属》と《平行》，《ほとんど線型従属》と《ほとんど平行》とはそれぞれ同じことである．

定理 6　（i）$\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ が $\boldsymbol{R}^*$ 上線型従属なら $\boldsymbol{R}$ 上ほとんど線型従属である．

（ii）実ベクトルに関しては，《$\boldsymbol{R}$ 上線型従属》《$\boldsymbol{R}^*$ 上線型従属》《$\boldsymbol{R}$ 上ほとんど線型従属》の三概念は同値である．

証明　（i）ある $\boldsymbol{A}_m$ が 0 なら当然 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ は $\boldsymbol{R}$ 上ほとんど線型従属だから，どの $\boldsymbol{A}_m$ も $\boldsymbol{0}$ でないとしてよい．

$$c_1\boldsymbol{A}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{0}$$

とする．ただし，$c_1, \cdots, c_k$ は超実数で，少くとも一つは 0 でない．すると，

$$c_1|\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{U}_1+\cdots+c_k|\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{U}_k=\boldsymbol{0}.$$

$|c_1||\boldsymbol{A}_1|, \cdots, |c_k||\boldsymbol{A}_k|$ のうちの最大のものを $b=|c_m||\boldsymbol{A}_m|$ とし，

$$d_l=\frac{c_l|\boldsymbol{A}_l|}{b} \qquad (l=1, \cdots, k)$$

と置く．d_l はみな有限，$|d_m|=1$ であり，

$$d_1\boldsymbol{U}_1+\cdots+d_k\boldsymbol{U}_k=\boldsymbol{0}$$

が成りたつ．標準部分を取ると，

$$st(d_1)\cdot st(\boldsymbol{U}_1)+\cdots+st(d_k)\cdot st(\boldsymbol{U}_k)=\boldsymbol{0}.$$

$st(d_m)$ は 0 でないから，$st(\boldsymbol{U}_1), \cdots, st(\boldsymbol{U}_k)$ は $\boldsymbol{R}$ 上線型従属，すなわち $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ は $\boldsymbol{R}$ 上ほとんど線型従属である．

（ii）部分解定理により，実ベクトルに対しては《$\boldsymbol{R}$ 上線型従属》と《$\boldsymbol{R}^*$ 上線型従属》とは同値である．さらに，k 個の実ベクトルが $\boldsymbol{R}$ 上線型従属だと言うのと，それらの単位ベクトルの標準部分が $\boldsymbol{R}$ 上線型従属だと言うのとは同じことである．したがって（ii）が成りたつ．　⊣

練習問題 10 A

1.　つぎの二本の 2 次元超実ベクトルについて，それらが a) 平行であるか，b) ほとんど平行であるか，または c) ほとんど平行でないかを判定せよ．ただし，ε は 0 でない無限小である．

（1）$\{\boldsymbol{i}+\varepsilon\boldsymbol{j}, \varepsilon\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\}$　（2）$\{\boldsymbol{i}+\varepsilon\boldsymbol{j}, \varepsilon\boldsymbol{i}+\varepsilon^2\boldsymbol{j}\}$　（3）$\{\boldsymbol{i}+\varepsilon\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}\}$

（4）$\{\varepsilon\boldsymbol{i}+\varepsilon\boldsymbol{j}, \varepsilon\boldsymbol{i}-\varepsilon\boldsymbol{j}\}$

2.　つぎの三本の 3 次元超実ベクトルについて，それらが a) $\boldsymbol{R}^*$ 上線型従属であるか，b) $\boldsymbol{R}$ 上ほとんど線型従属であるか，c) そうでないかを判定せよ．ただし，ε は 0 でない無限小である．

（1）$\{\boldsymbol{i}+\varepsilon\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}+\varepsilon\boldsymbol{k}, \varepsilon\boldsymbol{i}+(\varepsilon^2+1)\boldsymbol{j}+\varepsilon\boldsymbol{k}\}$　（2）$\{\boldsymbol{i}+\varepsilon\boldsymbol{j}, \varepsilon\boldsymbol{j}+\varepsilon\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}\}$

（3）　$\{\boldsymbol{i}+\varepsilon\boldsymbol{j}, \varepsilon\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}\}$

10B　ベクトル値関数

$\boldsymbol{R}$ の部分集合から n 次元ベクトルの集合への写像を**実ベクトル値関数**と言う．実ベクトル値関数 $\boldsymbol{F}$ に対し，

$$\boldsymbol{F}(t)=f_1(t)\boldsymbol{j}_1+\cdots+f_n(t)\boldsymbol{j}_n$$

と書くと，$\boldsymbol{F}$ の**成分関数** $f_1,\cdots,f_n$ は $\boldsymbol{F}$ と同じ定義域をもつ実関数である．$\boldsymbol{F}$ の自然拡大 $\boldsymbol{F}^*$ は超実ベクトル値関数で，その成分 $f_1^*,\cdots,f_n^*$ はそれぞれ $f_1,\cdots f_n$ の自然拡大である．

この章のしめくくりとして，一変数の実ベクトル値関数に対する極限，連続性，導関数の定義および同値性定理を述べる．

定義　$\boldsymbol{F}$ を実ベクトル値関数，$\boldsymbol{A}$ を実ベクトル，c を実数とする．

$$\lim_{t\to c}\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{A}$$

とは，$t\approx c$，$t\neq c$ なら $\boldsymbol{F}(t)\approx\boldsymbol{A}$ となることである．また，$\boldsymbol{F}$ が c で**連続**とは，$t\approx c$ なら $\boldsymbol{F}(t)\approx\boldsymbol{F}(c)$ となること，すなわち

$$\lim_{t\to c}\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{F}(c)$$

のことである．

定理　つぎの三条件は互いに同値である．

（i）　$\lim_{t\to c}\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{A}$.

（ii）　$m=1,\cdots,n$ に対して $\lim_{t\to c}f_m(t)=a_m$．ただし a_m は $\boldsymbol{A}$ の第 m 成分である．

（iii）　ε-δ 条件：　任意の正実数 ε に対し，ある正実数 δ を取ると，

$0<|t-c|<\delta$ なるかぎり $|\boldsymbol{F}(t)-\boldsymbol{A}|<\varepsilon$ が成りたつ．

証明　（i）と（ii）との同値性は命題1から出る．（ii）と（iii）の同値性は実関数の極限に対する同値性定理（節5A 定理1）から出る．　⊣

定義　$\boldsymbol{F}$ を実ベクトル値関数，$\boldsymbol{S}$ を実ベクトル，c を実数とする．任意の0でない無限小超実数 Δt に対して

$$\frac{\boldsymbol{F}(c+\Delta t)-\boldsymbol{F}(c)}{\Delta t}\approx \boldsymbol{S}$$

が成りたつとき，$\boldsymbol{F}$ は c で**微分可能**で**導ベクトル** $\boldsymbol{S}$ をもつと言い，

$$\boldsymbol{F}'(c)=\boldsymbol{S}$$

と書く．すなわち，

$$\boldsymbol{F}'(c)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{F}(c+\Delta t)-\boldsymbol{F}(c)}{\Delta t}.$$

極限についての同値性定理から導ベクトルについての同値性定理が出る．特に，$\boldsymbol{F}'(c)$ が存在するのは $f'_1(c), \cdots, f'_n(c)$ がすべて存在するときであり，このとき

$$\boldsymbol{F}'(c)=f'_1(c)\boldsymbol{j}_1+\cdots+f'_n(c)\boldsymbol{j}_n$$

が成りたつ．

ベクトル増分およびベクトル微分は，従属ベクトル変数（むしろ変ベクトルというべきか）としてつぎのように定義される．一変数の実ベクトル値関数 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}(t)$ があると，t は独立スカラー変数，$\boldsymbol{X}$ は従属ベクトル変数である．新しい独立スカラー変数 Δt および従属ベクトル変数 $\Delta\boldsymbol{X}$ をつぎの式で定義する：

$$\Delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}(t+\Delta t)-\boldsymbol{F}(t).$$

$\Delta\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X}$ の**ベクトル増分**と言う．また，式

$$d\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}'(t)\Delta t$$

によって定義される従属ベクトル変数 $d\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X}$ の**ベクトル微分**と言う．$\boldsymbol{F}'(t)$ が存在すれば $d\boldsymbol{X}$ が存在し，$dt=\Delta t$ と置くことにより，

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{F}'(t),\qquad \frac{\Delta\boldsymbol{X}}{\Delta t}\approx\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}$$

が成りたつ．

練習問題 10 B

1. $u=h(t)$ を実関数，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}(t)$，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{G}(t)$ をベクトル値関数とし，どれも微分可能とする．このとき，$h(t)\boldsymbol{F}(t)$，$\boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{G}(t)$ は微分可能で，

$$\frac{d(u\boldsymbol{X})}{dt}=u\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}+\frac{du}{dt}\boldsymbol{X},\qquad \frac{d(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y})}{dt}=\boldsymbol{X}\cdot\frac{d\boldsymbol{Y}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\cdot\boldsymbol{Y}$$

が成りたつことを示せ．

2. $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}(t)$ が微分可能で，$|\boldsymbol{F}(t)|$ が定数ならば，$\boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{F}'(t)=0$ となることを示せ．

11 多変数関数の微分法

11A 連続性および偏導関数

記号を簡潔にするために，二変数の実関数を扱う．しかし，これから現われる概念や結果はすべて n 変数の場合にそのまま一般化される．

節1D ですでに述べたことだが，超実平面の二点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ の間の**距離** $|P-Q|$ とは，

$$|P-Q|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

のことである．$|P-Q|\approx 0$ のとき，P は Q に**無限に近い**と言い，$P\approx Q$ と書く．P に無限に近い点の全体を P の**単子**と言う．また，

$$P(x_1, y_1)\approx Q(x_2, y_2)\Longleftrightarrow x_1\approx x_2,\quad y_1\approx y_2.$$

実点 P と正実数 δ が与えられたとき，$|Q-P|<\delta$ なる実点 Q の全体を点 P の δ **近傍**（一般には**実近傍**）と言い，$N_\delta(P)$ と書く．$\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 D の**内部**とは，D の点 P で，そのある実近傍が D に含まれるようなものの全体である．D がその内部と一致するとき，D を**開集合**と言う．開集合の補集合を閉集合と言う．点 P の任意の実近傍が集合 D とも D の補集合とも交わるとき，P は D の**境界**に属すると言う．

つぎの定理は，一変数のとき節 1D で証明した．二変数の場合も証明はまったく同様である．

定理 1　(i) Y を実平面の点集合，P を実平面の点とする．Y^* が P の単子を含めば，Y は P のある実近傍を含む．

(ii) f を二変数の実関数，$P\in\boldsymbol{R}^2$ とする．f が P に無限に近いあらゆる点 $(x, y)\approx P$ で定義されていれば，f は P のある実近傍で定義されている．

今後 f は二変数の実関数とする．

定義　$(a, b)\in\boldsymbol{R}^2$, $L\in\boldsymbol{R}$ とする．任意の $(x, y)\approx(a, b)$, $(x, y)\neq(a, b)$ に対して $f(x, y)\approx L$ が成りたつとき，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

と書く．無限大極限も同様に定義される．$f(a,b)$ が存在し，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$$

が成りたつとき，f は (a,b) で**連続**であると言う．

定理1により，(a,b) で連続な関数はすべて (a,b) のある実近傍で定義されていることになる．一変数のときと同様，つぎの同値性定理が成りたつ．

定理 2　つぎの三条件は互いに同値である：

(ⅰ)　$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L.$

(ⅱ)　任意の正実数 ε に対し，ある正実数 δ を取ると，$N_\delta(a,b)$ の任意の点 $(x,y)\neq(a,b)$ に対して $|f(x,y)-L|<\varepsilon$ が成りたつ．

(ⅲ)　ある正の超実数 δ を取ると，$0<|(x,y)-(a,b)|<\delta$ なる任意の超実点 (x,y) に対して $f(x,y)\approx L$ が成りたつ．

特に，二変数関数 $x+y$，$x-y$，xy はどれも到るところ連続である．実際，写像 st は galaxy(0) から $\boldsymbol{R}$ の上への環としての準同型写像だから，たとえば，$(x,y)\approx(a,b)\in\boldsymbol{R}^2$ に対して

$$x+y\approx st(x+y)=st(x)+st(y)=a+b$$

となる．

定理 3　連続関数の合成関数は連続である．すなわち，$f(x,y)$，$g(x,y)$ がともに $(x,y)=(a,b)$ で連続で，$h(u,v)$ が $(u,v)=(f(a,b),g(a,b))$ で連続なら，合成関数

$$k(x,y)=h(f(x,y),g(x,y))$$

は $(x,y)=(a,b)$ で連続である．

証明　$(x,y)\approx(a,b)$ なら $f(x,y)\approx f(a,b)$，$g(x,y)\approx g(a,b)$，したがって，

$$k(x,y)=h(f(x,y),g(x,y))\approx(f(a,b),g(a,b))=k(a,b).\qquad\dashv$$

定義　$f(x,y)$ を実関数，(a,b) を実点とする．一変数関数 $g(x)=f(x,b)$ の a での勾配 $g'(a)$ を f の x に関する (a,b) での**偏勾配**，**偏導値**，**偏微分係数**等と言い，$f_x(a,b)$ と書く．同様に $h(y)=f(a,y)$ とおいて，

$$f_y(a,b)=h'(b).$$

$z=f(x,y)$ と書くときは，つぎのような記号も使う：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=f_x(a,b),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=f_y(a,b).$$

二変数関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ をそれぞれ f の x,y に関する**偏導関数**と言う．

$f(x,y)$ の (a,b) での偏勾配が存在するというだけでは，二直線 $x=a, y=b$ の外の点で $f(x,y)$ がどうなっているかは全然分らない．これから，もっと強い微分可能性の概念を三種類挙げる．これらはこの章のあとの方で役に立つ．

定義　$(a,b)\in\boldsymbol{R}^2$ とし，偏勾配 $f_x(a,b)$，$f_y(a,b)$ が二つとも存在するとする．

（i）偏導関数 f_x, f_y がともに (a,b) で連続のとき，f は (a,b) で**滑らか**であると言う．

（ii）(a,b) に無限に近い任意の (x,y) および $(0,0)$ でない任意の無限小ベクトル $(\Delta x,\Delta y)$ に対して

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx f_x(a,b)\Delta x+f_y(a,b)\Delta y$$

$$(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\ \text{に比べて})$$

が成りたつとき，f は (a,b) で**一様微分可能**であると言う．

（iii）$(0,0)$ でない任意の無限小ベクトル $(\Delta x,\Delta y)$ に対して

$$f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)\approx f_x(a,b)\Delta x+f_y(a,b)\Delta y$$

$$(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\ \text{に比べて})$$

が成りたつとき，f は (a,b) で**微分可能**であると言う．

(ii), (iii) はそれぞれ一変数関数の一様微分可能性(節 7 A)，微分可能性(節 2 A)に対応する．これらの定義を ε-δ 条件の形で書くこともできるが，それは読者に任せる．

$z=f(x,y)$ に対し，**増分**と呼ばれる新しい従属変数を

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

によって定義する．また，

$$dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

によって**全微分**と呼ばれる従属変数 dz を定義する．Δz も dz も，四つの独立変数 $x, y, \Delta x, \Delta y$ に依存する従属変数である．この記号を使うと，f が (a,b) で微分可能とは，$(0,0)$ でない任意の無限小 $(\Delta x, \Delta y)$ に対して

$$\Delta z \approx dz \qquad (\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\ \text{に比べて})$$

が成りたつことである．

f が (a,b) で微分可能のとき，方程式

$$z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

の表わす平面を f の (a,b) での**接平面**と言う．$\Delta x=x-a, \Delta y=y-b$ と置くと，Δz は曲面に沿っての z の変化であり，dz は接平面に沿っての z の変化である．f が (a,b) で微分可能ということの定義により，$(x,y)\approx(a,b)$，$(x,y)\fallingdotseq(a,b)$ なる任意の点 (x,y) の上で，(a,b) での接平面は，$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ に比べて曲面に無限に近い．

つぎの結果は三つの微分可能性の間の関係を示す．

定理 4　(a,b) を実点とする．つぎの各条件は，それより下の条件より強い．すなわち，論理的に (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv).

(i)　f は (a,b) で滑らかである．

(ii)　f は (a,b) で一様微分可能である．

(iii)　f は (a,b) で微分可能である．

(iv)　f は (a,b) で連続である．

証明　(i) ⇒ (ii).　$(x,y)\approx(a,b)$，$(\Delta x,\Delta y)\mathrel{\substack{\approx\\ \neq}}(0,0)$ とする．

$$\begin{aligned}&f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)\\&=[f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)]+[f(x+\Delta x, y)-f(x,y)].\end{aligned}$$

f_x も f_y も (a,b) で連続だから (a,b) の単子で定義されている．一変数関数 $g(u)=f(x+\Delta x, u)$ に超実平均値定理を使うと，y と $y+\Delta y$ の間のある u に対して

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)=f_y(x+\Delta x, u)\Delta y$$

が成りたつ．同様に，y と $y+\Delta y$ の間のある t に対して

$$f(x+\Delta x, y)-f(x,y)=f_x(t,y)\Delta x$$

が成りたつ．仮定によって

$$f_y(x+\Delta x, u)\approx f_y(a,b), \qquad f_x(t,y)\approx f_x(a,b)$$

であり，また

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}, \qquad \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

はともに有限だから，

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)\approx f_x(a, b)\Delta x+f_y(a, b)\Delta y$$

$$(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \text{ に比べて})$$

が成りたつ．

（ⅱ）⇒（ⅲ）．　明らか．

（ⅲ）⇒（ⅳ）．　$(\Delta x, \Delta y)\approx(0,0)$ なら，（ⅲ）によって

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y)-f(a, b)\approx f_x(a, b)\Delta x+f_y(a, b)\Delta y\approx 0. \qquad \dashv$$

定理 5　$f(x, y)$ が実点 (a, b) で一様微分可能ならば，f は (a, b) のある実近傍で連続である．

証明は一変数の場合（節7 A定理3）とまったく同様である．

つぎの定理は，開区間上微分可能な関数の滑らかさと一様微分可能性との同値性（節3 C定理3）を多変数の場合に拡張したものである．

定理 6　$f(x, y)$ を実関数で，$\boldsymbol{R}^2$ の開集合 Y 上で偏導関数 f_x, f_y が存在するものとする．つぎの二条件は互いに同値である：

（ⅰ）f は Y の各点で滑らかである．

（ⅱ）f は Y の各点で一様微分可能である．

証明は読者に任せる．（ⅰ）⇒（ⅱ）は定理3から出る．

練 習 問 題 11 A

1.　つぎの関数の偏導関数および全微分を求めよ．

（1）$e^{x^2-y^2}$　（2）$\sin x \cos y$　（3）$\arcsin(x^2y)$　（4）$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

（5）$\dfrac{1}{xy}$　（6）e^{x+y}

2.　下に列挙する九つの関数について，つぎの四つの性質のどれどれをもつかを調べよ．

a）f は $(0,0)$ で滑らか．　b）f は $(0,0)$ で一様微分可能．　c）f は $(0,0)$ で微分可能．　d）f は $(0,0)$ で連続．　e）$(0,0)$ で $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ が存在する．

（1）$f(x, y)=\begin{cases}0 & (xy=0)\\ 1 & (xy\neq 0)\end{cases}$　（2）$\sqrt{|xy|}$　（3）$|xy|$　（4）$|x|+|y|$

（5）　$x+y$　　（6）　$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

（7）　$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

（8）　$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

（9）　$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

11B　合成法則および陰関数

二変数関数の合成法則は，関数がすべて前節の意味で微分可能のとき成りたつ．

二変数の合成法則　　$x=f(s,t)$，$y=g(s,t)$ が実点 (s_0,t_0) で微分可能であり，$z=h(x,y)$ が $(x_0,y_0)=(f(s_0,t_0),g(s_0,t_0))$ で微分可能ならば，合成関数

$$z=H(s,t)=h(f(s,t),g(s,t))$$

は (s_0,t_0) で微分可能であって，その偏勾配はつぎの式で与えられる：

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\qquad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

証明　　$(\Delta s,\Delta t)$ を $(0,0)$ でない無限小ベクトルとし，$\Delta x,\Delta y,\Delta z$ をそれぞれ対応する x,y,z の増分とする．$\delta=\sqrt{\Delta s^2+\Delta t^2}$ と置くと，点 (s_0,t_0) で

$$\Delta x\approx\frac{\partial x}{\partial s}\Delta s+\frac{\partial x}{\partial t}\Delta t\qquad (\delta\text{ に比べて}),$$

$$\Delta y\approx\frac{\partial y}{\partial s}\Delta s+\frac{\partial y}{\partial t}\Delta t\qquad (\delta\text{ に比べて})$$

が成りたつ．よって $\Delta x\approx0$，$\Delta y\approx0$．また，$\dfrac{\Delta x}{\delta}$，$\dfrac{\Delta y}{\delta}$ は有限，したがって $\dfrac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\delta}$ も有限で，

$$\Delta z\approx\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\qquad (\delta\text{ に比べて})$$

が成りたつ．

特に $\Delta t=0$ のときを考えると，$\delta=\Delta s$ だから，

$$\frac{\Delta z}{\Delta s}\approx\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s}\approx\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

したがって，

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

となる．同様に $\Delta s=0$ のときを考えて，

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

を得る．最後に，(s_0, t_0) で

$$\begin{aligned}\frac{\Delta z}{\delta}&\approx\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\delta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\delta}\\&\approx\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\Delta s+\frac{\partial x}{\partial t}\Delta t\right)\frac{1}{\delta}+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\Delta s+\frac{\partial y}{\partial t}\Delta t\right)\frac{1}{\delta}\end{aligned}$$

が成りたつから，

$$\Delta z\approx\frac{\partial z}{\partial s}\Delta s+\frac{\partial z}{\partial t}\Delta t\qquad(\delta \text{ に比べて})$$

となる．すなわち $z=H(s,t)$ は微分可能である．　⊣

例　直交座標 (x,y) と極座標 (r,θ) との関係は，

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\quad\text{または}\quad\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\arctan\dfrac{y}{x}\end{cases}$$

で与えられる．合成法則により，(x,y) ないし (r,θ) の従属変数 z に対し，

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta,\qquad\frac{\partial z}{\partial\theta}=-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta$$

および，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

が成りたつ．

つぎに陰関数定理の二変数と三変数の場合を扱う．

定義　実曲線 $F(x,y)=0$ の実点 (a,b) での**陰関数**とは，つぎの三条件をみたす実関数 $y=g(x)$ のことである：

（i）$g(a)=b$.

（ii）g は a のある実近傍で定義され，a で連続である．

（iii）g のグラフは方程式 $F(x,y)=0$ のグラフの部分集合である．すなわち

$F(x, g(x))=0.$

同様に，実曲面 $F(x, y, z)=0$ の実点 (a, b, c) での**陰関数**とは，つぎの三条件をみたす実関数 $z=h(x, y)$ のことである：

(i′)　$h(a, b)=c.$

(ii′)　h は (a, b) のある実近傍で定義され，a で連続である．

(iii′)　h のグラフは $F(x, y, z)=0$ のグラフの部分集合である．すなわち，
$F(x, y, h(x, y))=0.$

陰関数定理には一様微分可能性の概念が都合がよい．

二変数の陰関数定理　　実点 (a, b) で $z=F(x, y)$ は一様微分可能であり，$F(a, b)=0$，$F_y(a, b)\neq 0$ とする．このとき，曲線 $F(x, y)=0$ は (a, b) で陰関数をもつ．二つの陰関数は a のある実近傍で一致する．どの陰関数 $g(x)$ も a で一様微分可能（したがって a のある実近傍で連続）で，

$$g'(a)=-\frac{F_x(a, b)}{F_y(a, b)}$$

が成りたつ．

証明　　1°　$F_y(a, b)\neq 0$ だから，(a, b) での一様微分可能性に対する ε-δ 条件により，(a, b) のある実近傍 $N_\delta(a, b)$ を取ると，$N_\delta(a, b)$ の相異なる二点 $(x, y), (x, y+\Delta y)$ に対して

$$F(x, y)\neq F(x, y+\Delta y)$$

となる．したがって実関数 g を，

$$(x, y)\in N_\delta(a, b) \text{ かつ } F(x, y)=0 \text{ のとき } g(x)=y$$

として定義することができる（x に対してこのような y は高々一つしかない）．明らかに $g(a)=b$ である．

2°　$x_1\approx a$ とする．F は (a, b) で連続だから $F(x_1, b)\approx 0$．もし $F(x_1, b)=0$ なら $y_1=b$ とする．そうでない場合，一様微分可能性の仮定により，0 でない任意の無限小 Δy に対して

$$\frac{F(x_1, b+\Delta y)-F(x_1, b)}{\Delta y}\approx F_y(a, b)\neq 0$$

だから，

$$F(x_1, b+\Delta y)=F(x_1, b)+F_y(a, b)\Delta y+\varepsilon\cdot\Delta y, \qquad \varepsilon\approx 0$$

と書ける．ここでたとえば　$\Delta y=-\dfrac{2F(x_1, b)}{F_y(a, b)}$　とすると $\Delta y\approx 0$ で，

$$F(x_1, b+\Delta y)=-F(x_1, b)\left(1+\frac{2\varepsilon}{F_y(a, b)}\right)$$

となるから，$F(x_1, b)$ と $F(x_1, b+\Delta y)$ は異符号である．超実中間値定理により，b に無限に近い y_1 で，$F(x_1, y_1)=0$ なるものが存在する．定義により，式系

$$F(x, y)=0, \qquad |(x, y)-(a, b)|<\delta$$

の実解はすべて式 $y=g(x)$ の解である．したがって，解の公理によって $y_1=g(x_1)$ である．こうして g は a の単子で定義され，したがって，節 1D 系 4 により，g は a のある実近傍で定義される．$y_1 \approx b$ だったから g は a で連続である．構成から明らかに $F(x, g(x))=0$ だから，g は陰関数である．

3°　もう一つの陰関数 g_1 があるとする．$x \approx a$ なら，連続性によって $g_1(x) \approx b$ となる．したがって a の単子上では g と g_1 とは一致する．節 1D 系 4 (ii) によって a のある近傍上で g と g_1 とは一致する．

4°　$x \approx a, \Delta x \approx 0, \Delta x \neq 0$ とし，$y=g(x), \Delta y=g(x+\Delta x)-g(x)$，$\Delta s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ と置く．g は a で連続であり，$x+\Delta x \approx a$ だから，

$$\Delta y \approx (g(x+\Delta x)-g(a))-(g(x)-g(a)) \approx 0.$$

一様微分可能性により，

$$\begin{aligned}0&=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)\\&\approx F_x(a, b)\Delta x+F_y(a, b)\Delta y \qquad (\Delta s \text{ に比べて}).\end{aligned}$$

$F_y(a, b) \neq 0$ の仮定により，

$$\frac{\Delta y}{\Delta s} \approx -\frac{F_x(a, b)}{F_y(a, b)}\frac{\Delta x}{\Delta s}. \qquad (1)$$

かりに $\frac{\Delta x}{\Delta s} \approx 0$ とすると，$\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2=1$ から

$$1 \approx \frac{\Delta y}{\Delta s} \approx -\frac{F_x(a, b)}{F_y(a, b)}\cdot 0 \approx 0$$

となって矛盾する．そこで (1) の両辺を $\frac{\Delta x}{\Delta s}$ で割ると，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta y}{\Delta s}}{\frac{\Delta x}{\Delta s}} \approx -\frac{F_x(a, b)}{F_y(a, b)}.$$

すなわち，g は a で一様微分可能で，$g'(a)=-\frac{F_x(a, b)}{F_y(a, b)}$.　⊣

三変数の陰関数の定理の前に，三変数関数の一様微分可能性を定義しておく．

定義　F を三変数の実関数とし，実点 (a, b, c) において偏勾配が三つとも存在するとする．(a, b, c) に無限に近い任意の (x, y, z) および $(0, 0, 0)$ でない任意の無限小ベクトル $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ に対して

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-F(x, y, z)$$
$$\approx F_x(a, b, c)\Delta x+F_y(a, b, c)\Delta y+F_z(a, b, c)\Delta z$$
$$\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\ \text{に比べて}\right)$$

が成りたつとき，F は (a, b, c) で**一様微分可能**であると言う．

つぎの陰関数定理は，二変数の場合とまったく同様に証明される．

三変数の陰関数定理　実点 (a, b, c) で $w=F(x, y, z)$ は一様微分可能であり，$F(a, b, c)=0$，$F_z(a, b, c)\neq 0$ とする．このとき，曲面 $F(x, y, z)=0$ は (a, b, c) で陰関数をもつ．二つの陰関数は a のある実近傍で一致する．どの陰関数 $h(x, y)$ も (a, b) で一様微分可能（したがって (a, b) のある実近傍で連続）で，

$$h_x(a, b)=-\frac{F_x(a, b, c)}{F_z(a, b, c)}, \qquad h_y(a, b)=-\frac{F_y(a, b, c)}{F_z(a, b, c)}$$

が成りたつ．

練 習 問 題 11 B

1.　つぎの諸事項を証明せよ．ただし，f は滑らかな関数とする．

（1）　$z=f(x, y)$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ なら

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

（2）　$z=f(ax+by)$ なら　$b\dfrac{\partial z}{\partial x}=a\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

（3）　$z=f(x+at, y+bt)$ なら　$\dfrac{\partial z}{\partial t}=a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

（4）　$z=f\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$ なら　$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

2.　つぎの方程式の表わす曲線の概形をかき，その定める陰関数 $y=f(x)$ の導関数を求めよ．

（1）　$x^2+y^2=4$　　（2）　$y+\log y+x^3=0$　　（3）　$x^2-y^2=0$

（4）　$\sqrt{x}+\sqrt{xy}+\sqrt{y}=1$.

3. つぎの方程式の定める陰関数　$z=f(x,y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

（1）$x^2+2y^2+3z^2=6$　（2）$x^2y+z^2=1$　（3）$e^x+e^y+e^z=1$
（4）$x^2+y^3+\log z=2$　（5）$xy^2z^3+2=0$

11C 最大と最小

二変数実関数の最大最小問題を論ずる.

定義　$f(x,y)$ を実関数，その定義域を D とする．(x_0,y_0) が D の点で，D のあらゆる点 (x,y) に対して

$$f(x_0,y_0)\geqslant f(x,y)$$

が成りたつとき，f は (x_0,y_0) で**最大値** $f(x_0,y_0)$ を取ると言う．**最小値**も同様に定義される.

つぎの二つの定理は一変数のときとまったく同様に証明される.

定理 1　D 上の実関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で最大なら，D^* の任意の超実点 (x,y) に対して $f(a,b)\geqslant f(x,y)$ が成りたつ.

定理 2　実関数 $f(x,y)$ および点 (a,b) に対してつぎの二条件は互いに同値である：

（i）f は (a,b) で**極大**である．すなわち，f を (a,b) のある実近傍に制限したものが (a,b) で最大である.

（ii）$(x,y)\approx(a,b)$ なら $f(a,b)\geqslant f(x,y)$.

節1Dの系6を二変数の場合に書きなおすとつぎのようになる．$\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 D が有界閉集合であるためには，つぎの二条件が必要十分である：

（i）D^* の任意の点は有限である.

（ii）$(x,y)\in D^*$ なら $(st(x),st(y))\in D$.

これを使って二変数の最大最小値定理を証明する.

最大最小値定理　有界閉集合 D 上の連続関数は最大値，最小値をもつ.

証明　f の値域を Y とする：

$$Y=\{f(x,y)\,;\ (x,y)\in D\}.$$

節1D 定理1により，f^* の定義域は D^*，値域は Y^* である．D^* の任意の点 (x_1, y_1) に対し，$(st(x_1), st(y_1))\in D$ だから，f の連続性によって

$$f(x_1, y_1)\approx f(st(x_1), st(y_1)).$$

したがって $f(x_1, y_1)$ は有限，したがって Y^* の元はすべて有限である．節1D 定理5によって Y は有界，すなわちある実数 A, B を取ると，$Y\subseteq[A, B]$ となる．正整数 n に対し，$\delta=\dfrac{B-A}{n}$ と置き，$[A, B]$ を幅 δ の n 個の小区間に分割する．小区間を左から見ていって，Y と交わる最後のものが k 番目の小区間だとする．$k=k(n)$ と書く．ある点 $(g(n), h(n))$ を取ると，

$$(g(n), h(n))\in D, \qquad A+(k-1)\delta\leqslant f(g(n), h(n))$$

が成りたつ．一方，D の任意の点 (x, y) に対して

$$f(x, y)\leqslant A+k\delta$$

である．そこで n_1 を正の無限大超整数とし，$\delta_1=\dfrac{B-A}{n_1}$，$k_1=k(n_1)$ と置く．解の公理により，

$$(g(n_1), h(n_1))\in D^*, \qquad A+(k_1-1)\delta_1\leqslant f(g(n_1), h(n_1))$$

が成りたつ．もう一度解の公理により，D^* の任意の点 (x_1, y_1) に対して

$$f(x_1, y_1)\leqslant A+k_1\delta_1$$

となる．ここで

$$a=st(g(n_1)), \qquad b=st(h(n_1))$$

と置くと，D は有界閉集合だから $(a, b)\in D$．f は連続だから

$$f(a, b)=st(f(g(n_1), h(n_1))).$$

したがって，D の任意の点 (x, y) に対し，

$$f(x, y)\leqslant st(A+k_1\delta_1)=st(A+(k_1-1)\delta_1)\leqslant f(a, b)$$

となり，f は (a, b) で最大である．　⊣

この証明は，節3C でやった一変数の最大最小値定理の証明とは違う．節3C では f の定義域を分割したが，今度は f の値域を分割した．二変数の場合でも，f の定義域を方形の格子に分割すれば，節3C の証明がそのまま通用する．

点 (a, b) で f の偏勾配が二つとも0，

$$f_x(a, b)=0, \qquad f_y(a, b)=0$$

のとき，(a, b) を f の**臨界点**と言う．

臨界点定理 f がその定義域 D 上で連続であり，D の内部の点で微分可能とする．f が実点 (a,b) で最大または最小ならば，(a,b) は D の境界の点であるか，または f の臨界点である．

証明 f が D の内部の点 (a,b) で最大値を取るとする．一変数関数 $g(x)=f(x,b)$ は点 a で最大である．a は g の定義域の内部にあるから，一変数の臨界点定理（節3C）によって $f_x(a,b)=g'(a)=0$．同様に $f_y(a,b)=0$． ⊣

例 1 正方形 D：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ での関数 $z=x^2+y^2-xy-x$ の最大値および最小値を求める．

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y-1=0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2y-x=0$$

を解いて，D 内の臨界点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ を得る．そこでの関数値は $-\frac{1}{3}$ である．四本の境界線での最大値，最小値を表にするとつぎのようになる：

境 界 線	z	最 大	最 小
$x=0$，$0\leqslant y\leqslant 1$	y^2	$(0,1)$ で 1	$(0,0)$ で 0
$x=1$，$0\leqslant y\leqslant 1$	y^2-y	両端で 0	$\left(1,\frac{1}{2}\right)$ で $-\frac{1}{4}$
$y=0$，$0\leqslant x\leqslant 1$	x^2-x	両端で 0	$\left(\frac{1}{2},0\right)$ で $-\frac{1}{4}$
$y=1$，$0\leqslant x\leqslant 1$	x^2+1-2x	$(0,1)$ で 1	$(1,1)$ で 0

結局，z の最大は $(0,1)$ で 1，最小は $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ で $-\frac{1}{3}$ である．

一変数のときと同様，最大最小値定理と臨界点定理とによって，有界閉集合上の関数の最大値，最小値を求めることができる．この方法は他の領域でも有効であることが分る．

有界閉集合のもっとも典型的なものは，つぎの形の**初等閉領域**である：

$$D=\{(x,y)\ ;\ a\leqslant x\leqslant b,\ g(x)\leqslant y\leqslant h(x)\}.$$

ただし，g,h は $[a,b]$ 上の連続関数で，$g(x)\leqslant h(x)$ なるものである．これが実際に有界閉集合であることを示し，その境界を求めよう．

定理 3 Dを平面の初等閉領域とする．

(i) Dは有界閉集合である．

(ii) Dの境界は，Dの点でつぎの四つの曲線のどれかの上にあるものの全

体である：

$$x=a, \quad x=b, \quad y=g(x), \quad y=f(x).$$

証明　（i）g, h は連続だから $[a, b]$ 上最大値，最小値をもつ．したがって D は有界である．つぎに (x_1, y_1) を D^* の点，$x=st(x_1)$，$y=st(y_1)$ とする．

$$a \leqslant x_1 \leqslant b, \qquad g(x_1) \leqslant y_1 \leqslant h(x_1)$$

であり，連続性によって

$$g(x)=st(g(x_1)), \qquad h(x)=st(h(x_1))$$

だから，$a \leqslant x \leqslant b$，$g(x) \leqslant y \leqslant h(x)$，すなわち $(x, y) \in D$ となる．

（ii）まず，D の点が四つの曲線のどれかの上にあれば，それは D の境界の点である．たとえば $g(x)=y$ としよう．任意の正実数 ε に対し，$y-\varepsilon < g(x)$ だから $(x, y-\varepsilon) \notin D$，したがって近傍 $N_\varepsilon(x, y)$ は D に含まれない．

逆に D の点 (x, y) が四曲線のどれにも乗っていないとする：

$$a < x < b, \qquad g(x) < y < h(x).$$

$(x_1, y_1) \approx (x, y)$ なら $a < x_1 < b$．同様に $g(x_1) < y_1 < h(x_1)$．実際，かりにたとえば $y_1 \leqslant g(x_1)$ とすると，

$$y=st(y_1) \leqslant st(g(x_1))=g(st(x_1))=g(x)$$

となって矛盾する．したがって $(x_1, y_1) \in D^*$，すなわち D^* は (x, y) の単子を含む．節1D 定理2によって (x, y) は D の内部の点である．　⊣

多くの応用例の場合，関数 f はある初等閉領域 D で連続であり，D の内部で微分可能，しかも有限個の内部臨界点しかもたない．この場合，f の最大値は普通つぎのようにして求められる．まず有限個の臨界点での f の値を求める．つぎに D の四本の境界曲線のおのおので，変数を一つ消去して一変数関数として最大値を求める．以上のうち最大のものが f の最大値である．

例 2　領域 D：$-1 \leqslant x \leqslant 1$，$x^2 \leqslant y \leqslant 1$ での関数 $f(x, y)=x^2+y^2-y$ の最大最小を求める．まず，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y-1=0$$

を解いて臨界点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を得る．$f\left(0, \frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$．

Dの図をかけば分るように，

$$B_1: \ y=1, \ -1 \leqslant x \leqslant 1$$

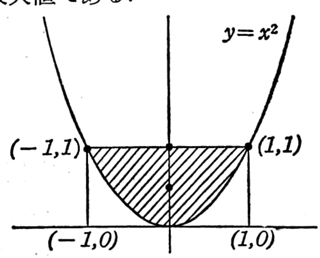


図 22

$$B_2:\ -1\leqslant x\leqslant 1,\ y=x^2$$

の二つの部分から成る．B_1 上の最大最小は，

$$f(\pm 1,1)=1,\qquad f(0,1)=0.$$

B_2 上では $f(x,y)=f(x,x^2)=x^4$ だから，最大最小は

$$f(\pm 1,1)=1,\qquad f(0,0)=0$$

である．結局，f は $(\pm 1,1)$ で最大値 1，$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ で最小値 $-\dfrac{1}{4}$ を取る．

つぎに開集合での最大最小を求める方法を考えよう．

I を $\boldsymbol{R}$ の開区間，g,h を I 上の連続実関数で $g(x)<h(x)$ $(x\in I)$ なるものとする．つぎの四つのうちのどれかの形の集合を**初等開領域**と言う：

$$\{(x,y)\ ;\ x\in I,\ g(x)<y<h(x)\},$$
$$\{(x,y)\ ;\ x\in I,\ -\infty<y<h(x)\},$$
$$\{(x,y)\ ;\ x\in I,\ g(x)<y<\infty\},$$
$$\{(x,y)\ ;\ x\in I,\ -\infty<y<\infty\}.$$

超実初等閉領域とは，つぎの形の $(\boldsymbol{R}^*)^2$ の部分集合である：

$$E=\{(x,y)\ ;\ a\leqslant x\leqslant b,\ f(x)+A\leqslant y\leqslant g(x)+B\}.$$

ただし，a,b,A,B は超実数，f,g は区間 I 上の連続実関数，$a,b\in I^*$ である．

初等開領域 D の**超実被覆** E とはつぎのものである．ε を正の無限小，H を正の無限大超実数とする．

$$D=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ ;\ a<x<b,\ g(x)<y<h(x)\}$$

の場合には

$$E=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^{*2}\ ;\ a+\varepsilon\leqslant x\leqslant b-\varepsilon,\ g(x)+\varepsilon\leqslant y\leqslant h(x)-\varepsilon\}$$

である．また，

$$D=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ ;\ a<x<\infty,\ g(x)<y<\infty\}$$

の場合には

$$E=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^{*2}\ ;\ a+\varepsilon\leqslant x\leqslant H,\ g(x)+\varepsilon\leqslant y\leqslant H\}$$

である．その他の場合も同様．もちろん，ε や H のとりかたによっていろいろな超実被覆ができる．

補題 4　E が初等開領域 D の超実被覆なら $D\subseteq E\subseteq D^*$.

証明は定義から明らか．

普通の微積分の教科書には，二階導関数による極大，極小，鞍点の判定法が書

いてあるが，大域的な最大，最小をみつける実用的なやりかたのことは書いてない．これから，超実数を使って初等開領域上の関数の最大最小をみつける方法を述べる．臨界点定理により，もし最大または最小が存在すればそれは臨界点で起る．しかし，最大や最小があるかどうかを判定するのは難かしいことが多い．つぎの方法は最大最小の存在を判定する実用的な方法である．

定理 5　実関数 $f(x, y)$ が初等開領域 D で定義され，いたるところ偏導関数をもつとする．さらに，臨界点のうちでは，(x_0, y_0) で最大だとする．E を D の超実被覆とする．このとき，

（i） E の境界のあらゆる点 (x, y) に対して $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$ ならば f は (x_0, y_0) で D における最大値を取る．

（ii） E の境界のある点 (x, y) に対して $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ なら f は D において最大値をもたない．

証明　D が

$$D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,;\ a < x < \infty,\ g(x) < y < \infty\}$$

のときに証明する．このとき，

$$E = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^{*2}\,;\ a + \varepsilon \leqslant x \leqslant H,\ g(x) + \varepsilon \leqslant y \leqslant H\}$$

である．ただし，ε は正の無限小，H は正の無限大である．まず（ii）から証明する．f が D で最大値をもつと仮定する．臨界点定理により，それは (x_0, y_0) においてでなければならない．すると定理1により，D^* のあらゆる点 (x, y) に対して $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$ となる．$E \subseteq D^*$ だから，E の境界上の任意の点に対しても $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$ となり，仮定に反する．

つぎに（i）を証明する．正実数 ε_0 および H_0 に対し，初等閉領域 $E(\varepsilon_0, H_0)$ を

$$E(\varepsilon_0, H_0) = \{(x, y)\,;\ a + \varepsilon_0 \leqslant x \leqslant H_0,\ g(x) + \varepsilon_0 \leqslant y \leqslant H_0\}$$

によって定義し，$E(\varepsilon_0, H_0)$ の境界を $\partial E(\varepsilon_0, H_0)$ とする．すると，

$$E(\varepsilon_0, H_0) \subseteq D \subseteq E \subseteq D^*.$$

関係 $(x, y) \in E(\varepsilon_0, H_0)$ および $(x, y) \in \partial E(\varepsilon_0, H_0)$ はともに式系として表わされる．最大最小値定理および臨界点定理により，もし (x_0, y_0) が $E(\varepsilon_0, H_0)$ に属すれば，f は $E(\varepsilon_0, H_0)$ における最大を点 (x_0, y_0) で取るか，または $\varepsilon E(\varepsilon_0, H_0)$ で取るはずである．だから，式系

$$(x_0, y_0) \in E(\varepsilon_0, H_0),\quad (s, t) \in E(\varepsilon_0, H_0),\quad f(x_0, y_0) < f(s, t) \qquad (1)$$

の実解はすべて式系

$$(u, v)\in\partial E(\varepsilon_0, H_0), \qquad f(x_0, y_0)<f(u, v) \tag{2}$$

の部分実解である．ここでかりに f が D での最大を (x_0, y_0) で取らないと仮定すると，$\partial E(\varepsilon_0, H_0)\subseteq D$ だから，D のある実点 (s, t) に対して $f(x_0, y_0)<f(s, t)$ となる．ところが，$D\subseteq E=E(\varepsilon, H)$ だから，(ε, H) に対して (1) はみたされる．したがって部分解定理により，(2) をみたすような実点 (u, v) が存在する．すなわち，E の境界の点 (u, v) で，$f(x_0, y_0)<f(u, v)$ となるものが存在することになり，仮定に反する．よって f は (x_0, y_0) で D における最大となる．　⊣

例 3　$f(x, y)=\dfrac{1}{(x+y)^2+(x+1)^2+y^2}$ に最大最小があるかどうかを調べ，あればそれを求める．定義域は全平面である．

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2(x+y)+2(x+1)}{[(x+y)^2+(x+1)^2+y^2]^2}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2(x+y)+2y}{[(x+y)^2+(x+1)^2+y^2]^2}=0$$

を解いて，唯一つの臨界点 $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$，$f\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)=3$ を得る．

つぎに正の無限大超実数 H を取り，

$$E=\{(x, y)\in \boldsymbol{R}^{*2}\ ;\ -H\leqslant x\leqslant H,\ -H\leqslant y\leqslant H\}$$

とする．E の境界のうち，$x=\pm H$ なら，f の値は無限小，$y=\pm H$ でも f の値は無限小である．したがって f は $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ で最大値 3 を取り，最小は存在しない．

練習問題 11C

1.　つぎの関数の最大最小を求めよ．

(1)　x^2+xy+y^2，$-1\leqslant x\leqslant 1$，$-1\leqslant y\leqslant 1$.

(2)　$x^2-y^2-2x+2y+3$，$0\leqslant x\leqslant 2$，$-4\leqslant y\leqslant x$

(3)　$\sin x\sin y$，$0\leqslant x\leqslant \pi$，$0\leqslant y\leqslant \pi$

(4)　$4-x^2-y^2$，$-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}$

2.　つぎの関数に最大最小があるかどうかを調べ，あればそれを求めよ．

(1)　x^2+4x+y^2　(2)　$\dfrac{1}{xy}$，$0<x$，$0<y$　(3)　$x^3+2x+y^3-y^2$

(4)　$xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{8}{y}$，$0<x$，$0<y$　(5)　$x+4y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$，$0<x$，$0<y$

(6)　$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，$x^2+y^2<1$　(7)　x^y，$0<x$

11D 二階偏導関数

二階の偏導値が偏微分の順序によらないことを超実数を使って証明する．仮定は，一階偏導関数がともにその点で一様微分可能，ということであり，滑らかさは仮定しない．証明はつぎの形の超実平均値定理による．

超実平均値定理　$f(x, y)$ を実関数で，開方形 D 上で偏導関数 $f_x(x, y)$ が存在するものとする．D^* の任意の二点 (x, y)，$(x+\varDelta x, y)$，$\varDelta x \neq 0$ に対し，x と $x+\varDelta x$ の間の超実数 t で，

$$\frac{f(x+\varDelta x, y)-f(x, y)}{\varDelta x}=f_x(t, y)$$

となるものが存在する．f_y についても同様の結果が成りたつ．

証明　一変数の実平均値定理により，式系

$$(x, y)\in D, \quad (x+\varDelta x, y)\in D, \quad \varDelta x>0 \tag{1}$$

の実解はすべて式系

$$\frac{f(x+\varDelta x, y)-f(x, y)}{\varDelta x}=f_x(t, y), \quad x<t<x+\varDelta x \tag{2}$$

の部分実解である．部分解定理によってこれを超実数に移せばよい．　⊣

定理　実関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ が両方とも実点 (a, b) で一様微分可能とする．このとき，(a, b) での二つの混合偏導値は一致する．すなわち

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b).$$

証明　$\varDelta x, \varDelta y$ を 0 でない無限小とする．仮定により，f_x, f_y は (a, b) のある実近傍で定義されている．

$$D=f(a+\varDelta x, b+\varDelta y)-f(a+\varDelta x, b)-f(a, b+\varDelta y)+f(a, b)$$

と置く．$g(x, \varDelta y)=f(x, b+\varDelta y)-f(x, b)$ に上の超実平均値を使って，

$$\begin{aligned}\frac{D}{\varDelta x}&=\frac{[f(a+\varDelta x, b+\varDelta y)-f(a+\varDelta x, b)]-[f(a, b+\varDelta y)-f(a, b)]}{\varDelta x}\\&=\frac{g(a+\varDelta x, \varDelta y)-g(a, \varDelta y)}{\varDelta x}=\frac{\partial g}{\partial x}(t, \varDelta y)\\&=\frac{\partial f}{\partial x}(t, b+\varDelta y)-\frac{\partial f}{\partial x}(t, b)\end{aligned}$$

が，a と $a+\Delta x$ の間のある t に対して成りたつ．同様に，b と $b+\Delta y$ の間のある u に対して

$$\frac{D}{\Delta y}=\frac{\partial f}{\partial y}(a+\Delta x, u)-\frac{\partial f}{\partial y}(a, u)$$

が成りたつ．$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ は (a, b) で一様微分可能だから，

$$\frac{D}{\Delta x\Delta y}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, b+\Delta y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, b)}{\Delta x}\approx\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a, b),$$

$$\frac{D}{\Delta x\Delta y}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a+\Delta x, u)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, u)}{\Delta x}\approx\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a, b).$$

したがって

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a, b)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a, b).$$ ⊣

例　$z=f(x, y)$，$x=x(u, v)$，$y=y(u, v)$ とし，関数はすべて定理の適用できるものとする．その u, v に関する二階偏導関数を，z の x, y に関する一，二回の偏導関数および，x, y の u, v に関する一，二階の偏導関数で表わしてみる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}&=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\\&\quad+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\\&\quad+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}\\&\quad+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}.\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ についても同じようにやればできる．

練習問題 11 D

1. 二階，三階の偏導関数を求めよ．

（1）$e^x\sin y+xy^2$　（2）$\cos(x+y)+\sin(x-y)$

2. つぎのことを証明せよ．

（1）$z=\log\sqrt{x^2+y^2}$ なら $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

（2）$w=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ なら $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0.$

3. つぎの関数について $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0, 0)$ および $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(0, 0)$ を求め，それらが一致しない

ことを確かめよ．定理が適用できないのはなぜか．

（1）　$z=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$　　（2）　$z=\begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

4.　$z=f(x,y)$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ のとき，z の r,θ に関する二階偏導関数を，z の x,y に関する一，二階偏導関数および r,θ の関数で表わせ．ただし，f には定理が適用されるものとする．

5.　$z=f(x,y)$ には定理が適用されるものとし，(a,b) を f の臨界点とする．$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$ の (a,b) での値を B とするとき，つぎのことを証明せよ．

（1）　$B>0$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(a,b)>0$　なら f は (a,b) で極小である．

（2）　$B>0$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(a,b)<0$　なら f は (a,b) で極大である．

（3）　$B<0$ なら f は (a,b) で極大でも極小でもない．

11E　線 積 分

定義　　$\boldsymbol{R}^2$ の点 A から B に到る**滑らかな曲線**（または**滑らかな有向曲線**）とはつぎのようなパラメーター曲線

$$C:\ 0\leqq s\leqq L,\quad x=g(s),\quad y=h(s)$$

のことである．ただし，関数 g,h は連続な導関数 $g'(s),h'(s)$ をもち，

$$A=(g(0),h(0)),\qquad B=(g(L),h(L))$$

であり，パラメーター s は A から (x,y) までの曲線の長さである．点 A,B をそれぞれこの曲線の**始点**，**終点**と言う．

定義　　滑らかな曲線

$$C:\ 0\leqq s\leqq L,\quad x=g(s),\quad y=h(s)$$

を含む開方形 D 上に連続な実ベクトル値関数

$$\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$$

が与えられたとする．定積分

$$\int_0^L\left(P\frac{dx}{ds}+Q\frac{dy}{ds}\right)ds$$

を C に沿う $\boldsymbol{F}$ の**線積分**と言い，

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}\quad \text{または}\quad \int_C Pdx+Qdy$$

と書く．

C に沿う無限リーマン和という概念を使って線積分を特徴づけよう．

n を正整数とし，$\Delta s=\dfrac{1}{n}$ と置く．$k=0,\cdots,n-1$ に対して

$$s_k=k\Delta s,\quad x_k=g(s_k),\quad y_k=h(s_k),$$
$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k,\qquad \Delta y_k=y_{k+1}-y_k,$$
$$\Delta \boldsymbol{S}_k=\Delta x_k\boldsymbol{i}+\Delta y_k\boldsymbol{j}$$

と置く．有限和

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{F}(x_k, y_k)\cdot\Delta\boldsymbol{S}_k=\sum_{k=0}^{n} [P(x_k, y_k)\Delta x_k+Q(x_k, y_k)\Delta y_k]$$

を C に沿う $\boldsymbol{F}$ の**有限リーマン和**と言い，

$$\sum_C \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{S}\quad \text{または}\quad \sum_C P\Delta x+Q\Delta y$$

と書く．この和 C は上の $n+1$ 個の点を順番に結んだ折線に対応し，n を決めればその値は決まる．だから，これを

$$I(n)=\sum_C \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{S}$$

と書く．そこで，H を正の無限大超整数としたときの値 $I(H)$ を C に沿う $\boldsymbol{F}$ の**無限リーマン和**と言い，

$$I(H)=\sum_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\sum_C Pdx+Qdy$$

と書く．

定理 1　上の記号のもとで，C に沿う $\boldsymbol{F}$ の線積分は C に沿う $\boldsymbol{F}$ の無限リーマン和の標準部分に等しい：

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=st\left(\sum_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}\right),$$

または

$$\int_C Pdx+Qdy=st\left(\sum_C Pdx+Qdy\right).$$

証明　まず正整数 n に対する有限リーマン和

$$\sum_C P\Delta x+Q\Delta y=\sum_{k=0}^{n} P(x_k, y_k)\Delta x_k+Q(x_k, y_k)\Delta y_k$$

を考える．r を正の実数とする．もしこの有限リーマン和と線積分との差が r 以上ならば，少なくとも一つの小区間の上で，リーマン和の項と線積分との差が $\dfrac{r}{n}$

以上でなければならない．したがって，式系

$$n\in \boldsymbol{Z},\quad 0<n,\quad \left|\sum_C P\varDelta x+Q\varDelta y-\int_C Pdx+Qdy\right|\geqq r \qquad (1)$$

の実解はすべて式系

$$\left.\begin{aligned}&\varDelta s=\frac{L}{n},\quad 0\leqq s\leqq s+\varDelta s\leqq L,\quad x=g(s),\quad y=h(s),\\&\varDelta x=g(s+\varDelta s)-g(s),\quad \varDelta y=h(s+\varDelta s)-h(s),\\&\left|P(x,y)\varDelta x+Q(x,y)\varDelta y-\int_s^{s+\varDelta s}(Pg'+Qh')ds\right|\geqq\frac{r}{n}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

の部分実解である．部分解定理により，(1) の超実解はすべて (2) の部分超実解である．そこで H に対する無限リーマン和 $\sum_C Pdx+Qdy$ を考え，かりに

$$\left|\sum_C Pdx+Qdy-\int_C Pdx+Qdy\right|\geqq r \qquad (3)$$

だったとする．$\varDelta_1 s=\dfrac{L}{H}$ と置くと，$0\leqq s_1\leqq s_1+\varDelta_1 s\leqq L$ なる s_1 で，

$$\left|P(x_1,y_1)\varDelta_1 x+Q(x_1,y_1)\varDelta_1 y-\int_{s_1}^{s_1+\varDelta_1 s}(Pg'+Qh')ds\right|\geqq\frac{r}{H}$$

なるものが存在する．ただし，

$$x_1=g(s_1),\qquad y_1=h(s_1),$$
$$\varDelta_1 x=g(s_1+\varDelta_1 s)-g(s_1),\qquad \varDelta_1 y=h(s_1+\varDelta_1 s)-h(s_1)$$

である．両辺を $\varDelta_1 s$ で割ると，

$$\left|P(x_1,y_1)\frac{\varDelta_1 x}{\varDelta_1 s}+Q(x_1,y_1)\frac{\varDelta_1 y}{\varDelta_1 s}-\frac{\int_{s_1}^{s_1+\varDelta_1 s}(Pg'+Qh')ds}{\varDelta_1 s}\right|\geqq\frac{r}{L} \qquad (4)$$

となる．$x=g(s)$，$y=h(s)$ であり，$\int_0^s(Pg'+Qh')ds$ は s の関数として滑らか（導関数が連続）だから，

$$\frac{\varDelta_1 x}{\varDelta_1 s}\approx g'(s_1),\qquad \frac{\varDelta_1 y}{\varDelta_1 s}\approx h'(s_1),$$

$$\frac{\int_{s_1}^{s_1+\varDelta s_1}(Pg'+Qh')ds}{\varDelta_1 s}\approx P(x_1,y_1)g'(s_1)+Q(x_1,y_1)h'(s_1)$$

である．したがって

$$P(x_1,y_1)\frac{\varDelta_1 x}{\varDelta_1 s}+Q(x_1,y_1)\frac{\varDelta_1 y}{\varDelta_1 s}\approx\frac{\int_{s_1}^{s_1+\varDelta s_1}(Pg'+Qh')ds}{\varDelta_1 s}$$

となり，(4) に反する．だから，どんな正実数 r に対しても (3) は成りたたな

い．すなわち，

$$\sum_C Pdx+Qdy \approx \int_C Pdx+Qdy$$

が成りたつ．

例 $\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$ とする．原点から (1,1) に達する三つの曲線に沿う $\boldsymbol{F}$ の線積分を求める．

（a） C_1： $y=x$, $0\leqq x\leqq 1$, $x=t$, $y=t$ により，

$$\int_{C_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{C_1}-ydx+xdy=\int_0^1(-t+t)dt=0.$$

（b） C_2： $y=x^2$, $0\leqq x\leqq 1$. $x=t$, $y=t^2$ により，

$$\int_{C_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{C_2}-ydx+xdy=\int_0^1(-t^2+t\cdot 2t)dt=\frac{1}{3}.$$

（c） C_3： $y=\sqrt[3]{x}$, $0\leqq x\leqq 1$. $x=t^3$, $y=t$ により，

$$\int_{C_3}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{C_3}-ydx+xdy=\int_0^1(-t\cdot 3t^2+t^3)dt=-\frac{1}{2}.$$

練 習 問 題 11 E

1. つぎの線積分を求めよ．

（1） $\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$, C は円 $x^2+y^2=4$ を，(2,0) から左まわりに一周する．

（2） $\boldsymbol{F}=\cos x\cdot\boldsymbol{i}+\sin y\cdot\boldsymbol{j}$, C は原点から (1,1) に達する直線．

（3） $\boldsymbol{F}=\dfrac{\boldsymbol{i}}{xy}+\dfrac{\boldsymbol{j}}{x+y}$, C は (1,1) から (3,1) を通り，(3,6) に達する折線．

（4） $\boldsymbol{F}=\dfrac{\boldsymbol{i}}{xy}+\dfrac{\boldsymbol{j}}{x+y}$, C： $x=t$, $y=t^2$, $1\leqq t\leqq 4$.

（5） $\int_C xe^y dx+x^2ydy$, C： $x=3t$, $y=t^2$, $0\leqq t\leqq 1$.

（6） $\int_C x^2ydx+xy^2dy$, C は円 $x^2+y^2=4$ を，(2,0) から左まわりに一周する．

2. 滑らかな関数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ が $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ をみたすとき，つぎのことを証明せよ．

（1） 関数 $f(x,y)$ で $\dfrac{\partial f}{\partial x}=P$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=Q$ なるものが存在する．

（2） 点 A から点 B に達する任意の滑らかな曲線 C に沿う線積分 $\int_C Pdx+Qdy$ はすべて一致する．

12 重積分

記号を簡単にするためにもっぱら二重積分を扱う．しかし，あらゆることはそのまま三重積分の場合に書きなおせる．

12A 二 重 積 分

二変数の連続な実関数の二重積分の定義および基本性質を述べる．大抵の場合，証明は一変数のときの対応する証明とほとんど同じである．そういうときは証明を省略する．

この節を通じ，$f(x, y)$ は $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 D_0 上の連続実関数を表わす．そして D_0 に含まれる初等閉領域 D を考える．

一変数のときの面積関数に対応するのは，今度は体積関数なるものである．

定義　D_0 に含まれる各初等閉領域 D に実数 $B(D)$ を対応させる写像 B がつぎの二条件をみたすとき，B を f の**体積関数**と言う：

加法性　$D=D_1\cup D_2$

$D_1=\{(x, y)\in D;\ \ x\leqslant c\}$,

$D_2=\{(x, y)\in D;\ \ x\geqslant c\}$

なら　$B(D)=B(D_1)+B(D_2)$.

また，$D=D_1\cup D_2$,

$D_1=\{(x, y)\in D;\ \ y\leqslant k(x)\}$,

$D_2=\{(x, y)\in D;\ \ y\geqslant k(x)\}$

の場合も　$B(D)=B(D_1)+B(D_2)$.

柱形性　D の面積を A，f の D 上の最大値を M，最小値を m とすると，

$$mA\leqslant B(D)\leqslant MA.$$

加法性は，D を垂直線 $x=c$ によって左右二つ，または連続曲線 $y=k(x)$ によって上下二つの初等閉領域 D_1, D_2 に分けたとき，$B(D)=B(D_1)+B(D_2)$ が成りたつことを言っている．直観的には，領域 D 上の，平面 $z=0$ と曲面 $z=$

$f(x,y)$ とで切りとられた部分の《体積》は，上述の加法性および柱形性をもっている．そして，二重積分が f の唯一つの体積関数になるのである．その第一歩は有限二重リーマン和である．

$$D=\{(x,y)\ ;\ a_1\leqslant x\leqslant a_2,\ b_1(x)\leqslant y\leqslant b_2(x)\}$$

を D_0 に含まれる初等閉領域とし，$a_1\leqslant x\leqslant a_2$ での $b_1(x)$ の最小値を B_1，$b_2(x)$ の最大値を B_2 とする．閉方形

$$[a_1,a_2]\times[B_1,B_2]$$

を D の**外接方形**と言う．

$\varDelta x, \varDelta y$ を正の実数とし，区間 $[a_1,a_2]$ および $[B_1,B_2]$ をそれぞれ長さ $\varDelta x$, $\varDelta y$ の小区間に分割する：

$$x_0=a_1,\ x_1=a_1+\varDelta x,\ \cdots,\ x_m=a_1+m\varDelta x,\ x_m<a_2\leqslant x_m+\varDelta x,$$
$$y_0=B_1,\ y_1=B_1+\varDelta y,\ \cdots,\ y_n=B_1+n\varDelta y,\ y_n<B_2\leqslant y_n+\varDelta y.$$

$\varDelta x$ が a_2-a_1 を等分した長さでない場合には，最後の区間 $[x_m,a_2]$ の長さは $\varDelta x$ より小さく，区間 $[x_m,x_m+\varDelta x]$ に含まれる．$\varDelta y$ の方も同様．こうして，外接方形 $[a_1,a_2]\times[B_1,B_2]$ はヨコ $\varDelta x$，タテ $\varDelta y$ の方形の格子によって覆われる．

定義　有限和

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\{f(x_k,y_l)\varDelta x\varDelta y\ ;\ (x_k,y_l)\in D\}$$

を，f の D 上の**有限二重リーマン和**と言い，

$$\sum\sum_{D}f(x,y)\varDelta x\varDelta y$$

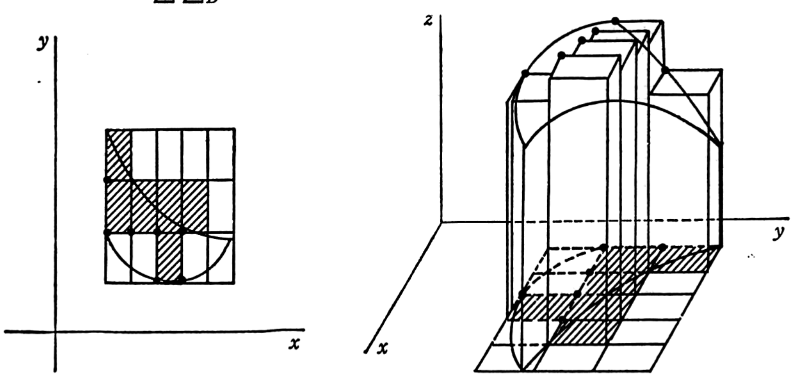


図 23　二重リーマン和

と書く．すなわち，それは (x_k, y_l) $(0\leqslant k\leqslant m,\ 0\leqslant l\leqslant n)$ のうち D に属するものだけを取り，そこで底面のヨコ Δx，タテ Δy，高さ $f(x_k, y_l)$ の方体の体積 $f(x,y)\Delta x\Delta y$ を考えて足し合わせたものである．D を固定すると，有限二重リーマン和は $\Delta x, \Delta y$ の関数であり，$\Delta x>0, \Delta y>0$ に対して定義される．関数の公理により，それは正の超実数 dx, dy に対しても定義される．

定義　dx, dy が正の無限小超実数のとき，超実数

$$\sum\sum_D f(x,y)dxdy$$

を，f の D 上の dx, dy に関する**無限リーマン和**と言う．

補題 1　任意の正の無限小 dx, dy に対して，無限リーマン和

$$\sum\sum_D f(x,y)dxdy$$

は有限超実数である．

定義　dx, dy を正の無限小とする．無限リーマン和 $\sum\sum_D f(x,y)dxdy$ の標準部分を，f の dx, dy に関する D 上の**二重積分**と言い，

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

と書く．

定理 2　f の D 上の積分は dx, dy によらない．すなわち，任意の正の無限小 dx, d_1x, dy, d_1y に対して

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(x,y)d_1xd_1y.$$

今後 $dA=dxdy$ と書き，二重積分を $\iint_D f(x,y)dA$ とも書く．

定理 3　二重積分は f の唯一つの体積関数である．

この定理により，領域 D 上の，平面 $z=0$ と曲面 $z=f(x,y)$ とで切りとられた立体の**体積** V を，

$$V=\iint_D f(x,y)dA$$

と定義することが正当化される．また，柱形性により，領域 D の面積 A は二重積分

$$A=\iint_D 1\,dA$$

に等しい．

つぎの定理は二重積分を計算する基本的な手続きを与える．

累次積分定理 D をつぎの初等閉領域とする：

$$D=\{(x,y);\ a_1\leqslant x\leqslant a_2,\quad b_1(x)\leqslant y\leqslant b_2(x)\}.$$

f の D 上の二重積分はつぎの累次積分に等しい：

$$\iint_D f(x,y)dA=\int_{a_1}^{a_2}\left[\int_{b_1(x)}^{b_2(x)} f(x,y)dy\right]dx.$$

証明

$$B(D)=\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1(x)}^{b_2(x)} f(x,y)dydx$$

と置く．一変数積分の性質から簡単に分るように，$B(D)$ は f の体積関数である．⊣

系 3 D が方形 $[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]$ ならば，

$$\iint_D f(x,y)dA=\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dydx=\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} f(x,y)dxdy.$$

証明 二重リーマン和の定義は x と y とに関して対称だから，(x,y) 平面での二重積分と (y,x) 平面での二重積分とは一致する．したがって，累次積分定理により，

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dydx=\iint_D f(x,y)dA=\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} f(x,y)dxdy.$$ ⊣

例 $x=y^2$, $x=y+2$ で囲まれる領域 D 上の重積分 $\iint_D xydA$ を求める．領域 D は図のようになり，二曲線の交点は $(1,-1)$, $(4,2)$ の二点である．したがって D は，

$$D=\{(x,y);\ -1\leqslant y\leqslant 2,\ y^2\leqslant x\leqslant y+2\}$$

と書ける．

$$\iint_D xydA=\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} xydxdy=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y\right]_{y^2}^{y+2}dy$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}y^3+2y^2+2y-\frac{1}{2}y^5\right)dy=\frac{135}{24}.$$

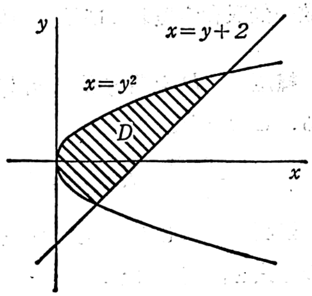


図 24

練 習 問 題 12 A

1. つぎの重積分ないし累次積分を計算せよ．

(1) $\iint_D (x+2y)dA$, D: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant x$

(2) $\iint_D (x^2+\sqrt{y})dA$, D: $-1\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant x^2$

（3） $\iint_D y\sin x dA$, D： $0\leqq x\leqq\pi$, $\sin^2 x\leqq y\leqq 2\sin x$

（4） $\iint_D (e^x+e^y)dA$, D： $-3\leqq x\leqq 3$, $-x\leqq y\leqq x$

（5） $\int_0^1\int_0^{e^x} dydx$　（6） $\int_0^{\pi}\int_{\sin x}^1 dydx$　（7） $\int_0^1\int_0^y \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dxdy$.

2. つぎの領域，またはつぎの曲面の囲む領域の体積を求めよ．

（1） $0\leqq x\leqq 2$, $0\leqq y\leqq x$, $y\leqq z\leqq x$　（2） $-1\leqq x\leqq 1$, $x^2\leqq y\leqq 1$, $x\sqrt{y}\leqq z\leqq y$

（3） $0\leqq x\leqq\pi$, $-\sin x\leqq y\leqq\sin x$, $-\sin x\leqq z\leqq\sin x$

（4） $y=0$, $x+y=2$, $z=-x$, $z=x$　（5） $z=x^2+y^2$, $z=4$

（6） $z=x^2+y^2+1$, $z=2x+2y$　（7） $x^2+y^2=9$, $x^2+z^2=9$

（8） $z=x^2+y^2$, $z=2-x^2-y^2$　（9） $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

3. つぎの三重積分を計算せよ．

（1） $\iiint_E\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right)dV$,　E： $1\leqq x\leqq e$, $1\leqq y\leqq x$, $1\leqq z\leqq x$

（2） $\iiint_E xe^{y+z}dV$,　E： $1\leqq x\leqq 2$, $0\leqq y\leqq\log x$, $0\leqq z\leqq y$.

（3） $\iiint_E dV$,　E： $0\leqq x\leqq 1$, $x^2\leqq y\leqq x$, $x^2y\leqq z\leqq x\sqrt{y}$

12B　グリーンの定理

滑らかな境界をもつ初等閉領域でのグリーンの定理を述べる．証明には，一変数の無限和定理および積分の偏導関数に関する補題を使う．

補題　Dを開方形，(a,b)をDの点，$P(x,y)$をD上の滑らかな関数とする．このとき，

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x P(t,y)dt=P(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\int_a^x P(t,y)dt=\int_a^x\frac{\partial P}{\partial y}(t,y)dt.$$

証明　はじめの等式は微積分の第二基本定理（節4C）からすぐに出る．第二の等式を証明しよう．

$$F(x,y)=\int_a^x P(t,y)dt,\qquad (x,y)\in D$$

と置く．すると，式系

$$(x,y)\in D,\quad (x,y+\Delta y)\in D,\quad \Delta y\neq 0 \qquad (1)$$

の実解は式系

$$\frac{F(x,y+\Delta y)-F(x,y)}{\Delta y}=\int_a^x \frac{P(t,y+\Delta y)-P(t,y)}{\Delta y}dt \qquad (2)$$

の解である．さらに，積分の平均値定理により，(1) の実解はすべて式系

$$\int_a^x \left[\frac{P(t,y+\Delta y)-P(t,y)}{\Delta y}-\frac{\partial P}{\partial y}(t,y)\right]$$
$$=(x-a)\left[\frac{P(u,y+\Delta y)-P(u,y)}{\Delta y}-\frac{\partial P}{\partial y}(u,y)\right] \qquad (3)$$

u は a と x との間にある

の部分実解である．

いま (x,y) を D の点，$\Delta_1 y$ を 0 でない無限小とする．$(x,y+\Delta_1 y)\in D^*$ だから，部分解定理により，ある超実数 u_1 に対して (2), (3) が成りたつ．一方，P は D で滑らか，したがって一様微分可能だから，

$$\frac{P(u_1,y+\Delta_1 y)-P(u_1,y)}{\Delta_1 y}\approx\frac{\partial P}{\partial y}(u_1,y)$$

が成りたつ．(3) により，

$$\int_a^x \frac{P(t,y+\Delta_1 y)-P(t,y)}{\Delta_1 y}dt\approx\int_a^x \frac{\partial P}{\partial t}(t,y)dt$$

となる．さらに (2) によって

$$\frac{F(x,y+\Delta_1 y)-F(x,y)}{\Delta_1 y}=\int_a^x \frac{P(t,y+\Delta_1 y)-P(x,y)}{\Delta_1 y}dt\approx\int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}(t,y)dt$$

であり，したがって

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}(t,y)dt$$

が成りたつ．　⊣

初等閉領域

$$D=\{(x,y)\ ;\ a_1\leqslant x\leqslant a_2,\ b_1(x)\leqslant y\leqslant b_2(x)\}$$

の境界を ∂D と書く．C を含むある開方形上の連続なベクトル値関数

$$\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$$

の，∂D に沿う左まわりの線積分を

$$\oint_{\partial D} Pdx+Qdy$$

と書く（これは始点＝終点の選びかたには関係ない）．

グリーンの定理　上の記号のもとに，関数 $b_1(x)$, $b_2(x)$, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ はすべて滑らかな関数とする．このとき，

$$\oint_{\partial D} Pdx+Qdy=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

が成りたつ．

証明　1°　$a_1 \leqslant u < v \leqslant a_2$ とし，$[u, v]$ 上の D の部分を D_1 とする．

$$B(u, v)=\oint_{\partial D_1} Pdx+Qdy$$

と置く．B は加法性をもつ．すなわち，$u<w<v$ なら

$$B(u, v)=B(u, w)+B(w, v).$$

実際，D_1 を垂直線 $x=w$ で二つの領域 D_2, D_3 に分けると，∂D_2 と ∂D_3 とはその垂直線上逆向きになり，線積分は消し合ってしまう．

我々の目標は，$[a_1, a_2]^*$ の任意の無限小部分区間 $[x, x+\varDelta x]^*$ に対して

$$\frac{\varDelta B}{\varDelta x} \approx P(x, b_1(x))-P(x, b_2(x))+\int_{b_1(x)}^{b_2(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}dy \tag{4}$$

が成りたつことを示すことである．ただし，$\varDelta B=B(x, x+\varDelta x)$．実際，もし (4) が証明されたとすると，無限和定理により，

$$B(a_1, a_2)=\int_{a_1}^{a_2}\left[P(x, b_1(x))-P(x, b_2(x))+\int_{b_1(x)}^{b_2(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}dy\right]dx$$

が成りたつ．一方，微積分の基本定理により，$x \in [a_1, a_2]$ に対して

$$\int_{b_1(x)}^{b_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}dy=P(x, b_1(x))-P(x, b_2(x))$$

であるから，

$$\oint_{\partial D} Pdx+Qdy=B(a_1, a_2)$$
$$=\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1(x)}^{b_2(x)}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dydx=\iint_D\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dA$$

が示されて定理の証明を終る．

2°　(4) の証明．まず，$[a_1, a_2]$ の実部分区間 $[x, x+\varDelta x]$ を考える：

$$a \leqslant x < x+\varDelta x \leqslant a_2 \tag{5}$$

線積分 $\varDelta B=B(x, \varDelta x)$ を四つの辺に分けて考えると（$\varDelta x$ で割って），

$$\frac{\varDelta B}{\varDelta x}=\frac{1}{\varDelta x}\int_x^{x+\varDelta x}[P(t, b_1(t))+Q(t, b_1(t))b_1'(t)]dt$$
$$+\frac{1}{\varDelta x}\int_{b_1(x+\varDelta x)}^{b_2(x+\varDelta x)} Q(x+\varDelta x, y)dy-\frac{1}{\varDelta x}\int_x^{x+\varDelta x}[P(t, b_2(t))$$
$$+Q(t, b_2(t))b_2'(t)]dt-\frac{1}{\varDelta x}\int_{b_1(x)}^{b_2(x)} Q(x, y)dy$$

となる．これはつぎのように書きかえられる：

$$\frac{\Delta B}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}[P(t,b_1(t))-P(t,b_2(t))]dt$$
$$+\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}[Q(t,b_1(t))b_1'(t)-Q(t,b_2(t))b_2'(t)]dt$$
$$+\int_{b_1(x)}^{b_2(x)}\frac{Q(x+\Delta x,y)-Q(x,y)}{\Delta x}dy$$
$$+\frac{1}{\Delta x}\int_{b_1(x+\Delta x)}^{b_1(x)}Q(x+\Delta x,y)dy+\frac{1}{\Delta x}\int_{b_2(x)}^{b_2(x+\Delta x)}Q(x+\Delta x,y)dy. \quad (6)$$

さて，$[x,x+\Delta x]^*$ を $[a_1,a_2]^*$ の無限小部分区間とする．$(x,x+\Delta x)$ は式系(5)の超実解だから，解の公理によって(6)の解でもある．補題により，

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{b_1(x)}^{b_2(x)}Q(t,y)dy=\int_{b_1(x)}^{b_2(x)}\frac{\partial Q}{\partial t}(t,y)dy \quad (7)$$

である．(7)の各辺は仮定によって t,x の連続関数，したがって $\int_{b_1(x)}^{b_2(x)}Q(t,y)dy$ は t,x に関して一様微分可能である．$x=t$ と置くと，

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{b_1(x)}^{b_2(x)}[Q(x+\Delta x,y)-Q(x,y)]\,dy\approx\int_{b_1(x)}^{b_2(x)}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dy$$

が成りたつ．(6)の右辺の第三項に上式を代入し，他の四つの項に超実平均値定理を適用すると，

$$\frac{\Delta B}{\Delta x}\approx P(x,b_1(x))-P(x,b_2(x))+Q(x,b_1(x))b_1'(x)$$
$$-Q(x,b_2(x))b_2'(x)+\int_{b_1(x)}^{b_2(x)}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dy$$
$$-Q(x+\Delta x,b_1(x))\frac{\Delta b_1(x)}{\Delta x}+Q(x+\Delta x,\,b_2(x))\frac{\Delta b_2(x)}{\Delta x}$$
$$\approx P(x,b_1(x))-P(x,b_2(x))+\int_{b_1(x)}^{b_2(x)}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dy$$

となって(4)が証明された．　⊣

例　D が方形 $0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 1$ のとき，線積分 $I=\oint_{\partial D}x^2y\,dx+(x+y)dy$ を計算しよう．直接計算すると，

$$I=\int_0^2 x^2\cdot 0\,dx+\int_0^1(2+y)\,dy+\int_2^0 x^2\cdot 1\,dx+\int_1^0(0+y)dy=0+\frac{5}{2}-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{2}{3}.$$

グリーンの定理を使うと，

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2y)}{\partial y}\right)dA=\iint_D(1-x^2)dA=\int_0^2\int_0^1(1-x^2)dy\,dx=-\frac{2}{3}.$$

練習問題 12 B

1. 領域 D が区分的に滑らかな境界 ∂D をもつとき，D の面積 A は，

$$A=\oint_{\partial D} xdy=\oint_{\partial D} -ydx$$

と表わされることを示せ．

2. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ の面積を，1) 重積分によって，2) 前問によって線積分に変えて求めよ．

3. グリーンの定理を使ってつぎの線積分を求めよ．

（1） $\oint_{\partial D} e^{2x+3y}dx+e^{xy}dy$，$D$： $-2\leqslant x\leqslant 2$，$1\leqslant y\leqslant 1$

（2） $\oint_{\partial D} \dfrac{x}{y}dx+(2+3y)dy$，$D$： $1\leqslant x\leqslant 2$，$1\leqslant y\leqslant x^2$

（3） $\oint_{\partial D} \sqrt{1+x^2}\,dy$，$D$： $-1\leqslant x\leqslant 1$，$x^2\leqslant y\leqslant 1$

（4） $\oint_{\partial D} x^2ydx-xy^2dy$，$D$： $x^2+y^2\leqslant 1$．

12C 二変数の無限和定理

一変数の場合と同様，無限和定理は二重積分の応用の基礎となる．

定義　辺が座標軸に平行で，その長さが二つとも無限小であるような超実方形を**面積要素**と言い，一般に ΔD と書く．ΔD の左下の端点を (x, y)，ヨコ Δx，タテ Δy とすると，$\Delta A=\Delta x\Delta y$ は D の面積である．

無限和定理　$h(x, y)$ を開集合 D_0 上の連続な実関数とし，B を，D_0 に含まれる各初等閉領域 D に実数 $B(D)$ を対応させる写像とする．$\Delta x, \Delta y$ を正の無限小とし，つぎの三条件がみたされているとする：

（i） B は加法性をもつ（節 12 A のはじめの定義の意味で）．

（ii） どの D に対しても $B(D)\geqslant 0$．

（iii） D_0^* に含まれる，ヨコ Δx，タテ Δy の任意の面積要素 ΔD に対して，

$$B(\Delta D)\approx h(x, y)\,\Delta x\Delta y \qquad (\Delta x\Delta y \text{ に比べて}).$$

このとき，D_0 に含まれる任意の初等閉領域 D に対して

$$B(D)=\iint_D h(x, y)dA$$

が成りたつ．

これを証明するために補題を四つ準備する.

補題 1　D を D_0 の有界閉集合とする. ある正実数 ε を取ると, D の任意の点 P の ε 近傍 $N_\varepsilon(P)$ は D_0 に含まれる.

証明　主張に反し, どんな正実数 ε に対しても, D の点 P および D_0 に属さない点 Q で, $|P-Q|<\varepsilon$ なるものがあると仮定する. 部分解定理により, D^* の点 P_1 および D_0^* に属さない点 $Q_1 \in \boldsymbol{R}^{2*}$ で, $P_1 \approx Q_1$ なるものがある. D は有界閉集合だから, $P_0 = st(P_1) \in D$ である. $P_0 \in D_0$, $Q_1 \approx P_0$ であり, D_0 は開だから $Q_1 \in D_0^*$ となって矛盾する.　⊣

補題 2　f を D_0 で連続な実関数とする. D_0 に含まれる任意の初等閉領域 D に対し, $D \subseteq D_1 \subseteq D_0$ なる初等開領域 D_1 で, その上で f が有界であるようなものが存在する.

証明　D が

$$D = \{(x, y)\ ;\ a_1 \leqslant x \leqslant a_2,\ b_1(x) \leqslant y \leqslant b_2(x)\}$$

の形とする. 前の補題により, ある正実数 ε を取ると, D の任意の点の ε 近傍は D_0 に含まれる. そこで

$$D_2 = \{(x, y)\ ;\ a_1 - \varepsilon \leqslant x \leqslant a_2 + \varepsilon,\ b_1(x) - \varepsilon \leqslant y \leqslant b_2(x) + \varepsilon\}$$

と置くと, D_2 は初等閉領域で, $D \subseteq D_2 \subseteq D_0$ である. 最大最小値定理によって f は D_2 で最大値, 最小値をもつから, f は D_2 で有界である. D_2 の内部を D_1 とする：

$$D_1 = \{(x, y)\ ;\ a_1 - \varepsilon < x < a_2 + \varepsilon,\ b_1(x) - \varepsilon < y < b_2(x) + \varepsilon\}.$$

D_1 は初等開領域で, $D \subseteq D_1 \subseteq D_0$ であり, f は D_1 上有界である.　⊣

補題 3　写像 B が定理の条件 (i), (ii) をみたせば単調である. すなわち, $D_1 \subseteq D_2$ なら $B(D_1) \leqslant B(D_2)$.

証明　図25のように D_1 の境界線を延長すると, D_2 は五つの初等閉領域の合併で, その二つに共通な点は境界上にある：

$$D_2 = D_1 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4.$$

加法性により,

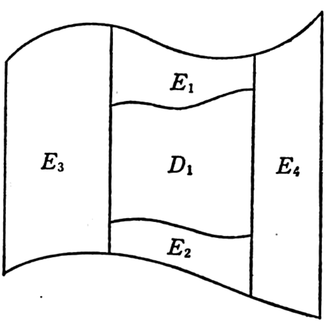


図 25

$$B(D_2)=B(D_1)+B(E_1)+B(E_2)+B(E_3)+B(E_4).$$

右辺の各項は負でないから $B(D_1)\leqslant B(D_2)$ となる．　⊣

補題 4　D を初等閉領域とする．任意の正実数 ε に対し，つぎの性質をもつ正実数 δ が存在する：D の外接方形を，長さ幅ともに δ より小さな小方形の格子に分割すると，D の境界と共通点をもつ小方形全部の面積の総和は ε より小さい．

証明　$$D=\{(x,y)\,;\ a_1\leqslant x\leqslant a_2,\ b_1(x)\leqslant y\leqslant b_2(x)\}$$
とし，D の外接方形が $[a_1,a_2]\times[B_1,B_2]$ であるとする．$b_1(x), b_2(x)$ は $[a_1,a_2]$ 上一様連続だから，任意の正実数 ε_1 に対して ε_1 より小さいある正実数 δ を取ると，$x_1,x_2\in[a_1,a_2]$，$|x_2-x_1|<\delta$ なら

$$|b_1(x_2)-b_1(x_1)|<\varepsilon_1,\qquad |b_2(x_2)-b_2(x_1)|<\varepsilon_1$$

となる．$0<\Delta x<\delta$，$0<\Delta y<\delta$ とし，外接方形をヨコ Δx，タテ Δy の小方形の格子に分割する．D のタテの境界は垂直だから，それぞれ小方形の高々二つのタテ列で覆われる．その面積はそれぞれ $2\varepsilon_1(B_2-B_1)$ より小さい．つぎに $b_1(x)$，$b_2(x)$ は幅 Δx の各小区間の上では，変化の最大が ε_1 より小さいから，D の上下の境界はそれぞれタテ何個かの小区間の列で覆われる．その部分の面積はそれぞれ $2\varepsilon_1(a_2-a_1)$ より小さい．したがって，D の境界と交わる小方形全部の面積の総和は

$$4\varepsilon_1[(B_2-B_1)+(a_2-a_1)]$$

より小さい．だから，与えられた ε に対して，

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{4[(B_2-B_1)+(a_2-a_1)]}$$

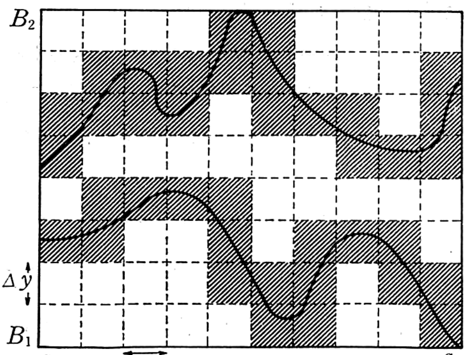


図 26

とし，この ε_1 に対して δ を取ればよい．　⊣

無限和定理の証明　1°　D_0 に含まれる初等閉領域 D が

$$D=\{(x,y)\,;\ a_1\leqslant x\leqslant a_2,\ b_1(x)\leqslant y\leqslant b_2(x)\}$$

だとして，$B(D)=\iint_D h(x,y)dA$ を示す．補題2により，一般性を失うことなく h は D_0 上有界だと仮定してよい．(i) と (iii) によって D_0 上 $h(x,y)\geqslant 0$ であ

る．だから，ある実数 M を取ると，D_0 上

$$0 \leqslant h(x, y) \leqslant M$$

となる．補題1により，ある正実数 ε を取ると，D の任意の点の ε 近傍は D_0 に含まれる．D の外接方形を $[a_1, a_2] \times [B_1, B_2]$ とする．

$$0 < \varDelta X < \frac{1}{2}\varepsilon, \qquad 0 < \varDelta Y < \frac{1}{2}\varepsilon$$

なる実数 $\varDelta X, \varDelta Y$ を考える．外接方形を，ヨコ $\varDelta X$，タテ $\varDelta Y$ の小方形の格子に分割する（$\varDelta X$ が $a_2 - a_1$ を等分した長さでないときには，一番右の方形の幅は $\varDelta X$ より小さくなる．$\varDelta Y$ についても同様）．こうして得られた小方形の全体を G，そのうち D の内部に含まれるものの全体を G_1，D の境界と交わるものの全体を G_2 とする．$\varDelta X + \varDelta Y < \varepsilon$ だから，$E \in G_1 \cup G_2$ なら E は D_0 に含まれる．

2° $B(D)$ と有限リーマン和 $\sum\sum_D h(x, y)\varDelta X \varDelta Y$ との差を評価しよう．G_2 に属する小方形の面積の総和を $p(\varDelta X, \varDelta Y)$ とする．$E \in G_1 \cup G_2$ に対して

$$H(E) = h(x, y)\varDelta X \varDelta Y$$

と置く．ただし，(x, y) は小方形 E の左下スミの点である．また，E が $G_1 \cup G_2$ を走るときの

$$\frac{|B(E) - H(E)|}{\varDelta X \varDelta Y}$$

の最大値を $q(\varDelta X, \varDelta Y)$ とする．

$0 \leqslant h(x, y) \leqslant M$ だから，

$$0 \leqslant H(E) \leqslant M\varDelta X \varDelta Y,$$

$$0 \leqslant B(E) \leqslant H(E) + |B(E) - H(E)| \leqslant (M + q(\varDelta X, \varDelta Y))\varDelta X \varDelta Y$$

が成りたつ．補題3により，

$$\sum_{E \in G_2} B(D \cap E) \leqslant \sum_{E \in G_2} B(E)$$

である．また，$G_1 \cap G_2 = \varnothing$ であり，$E \in G_1$ なら $E \subset D$ だから，加法性によって

$$B(D) = \sum_{E \in G_1} B(E) + \sum_{E \in G_2} B(D \cap E).$$

一方，

$$\sum\sum_D h(x, y)\varDelta X \varDelta Y = \sum_{E \in G_1 \cup G_2} H(E) = \sum_{E \in G_1} H(E) + \sum_{E \in G_2} H(E)$$

であるから，

$$\left|B(D)-\sum\sum_D h(x,y)\Delta X\Delta Y\right|$$
$$=\left|\sum_{E\in G_1}(B(E)-H(E))+\sum_{E\in G_2}B(D\cap E)-\sum_{E\in G_2}H(E)\right|$$
$$\leqslant\sum_{E\in G_1}|B(E)-H(E)|+\sum_{E\in G_2}B(D\cap E)+\sum_{E\in G_2}H(E)$$
$$\leqslant(a_2-a_1)(B_2-B_1)q(\Delta X,\Delta Y)+p(\Delta X,\Delta Y)(2M+q(\Delta X,\Delta Y))$$

となる．

3° さて，はじめに与えられた正の無限小 $\Delta x, \Delta y$ に戻る．解の公理によって

$$\left|B(D)-\sum\sum_D h(x,y)\Delta x\Delta y\right|$$
$$\leqslant(a_2-a_1)(B_2-B_1)\,q(\Delta x,\Delta y)+p(\Delta x,\Delta y)(2M+q(\Delta x,\Delta y))$$

が成りたつ．補題4および解の公理により，任意の正実数 ε_0 に対して $0\leqslant p(\Delta x,\Delta y)<\varepsilon_0$ だから，$p(\Delta x,\Delta y)\approx 0$ である．一方，部分解定理により，ヨコ Δx，タテ Δy の面積要素 ΔD で，D と共通点をもち，しかも

$$\frac{|B(\Delta D)-h(x,y)\Delta x\Delta y|}{\Delta x\Delta y}=q(\Delta x,\Delta y)$$

なるものが存在する．$\Delta D\subseteq D_0^*$ だから，仮定（iii）によって $q(\Delta x,\Delta y)$ は無限小である．したがって

$$\left|B(D)-\sum\sum_D h(x,y)\Delta x\Delta y\right|\approx 0,$$
$$B(D)=\iint_D h(x,y)dxdy$$

が証明された．　⊣

12D 二重積分の変数の取りかえ

無限和定理を使って，二重積分の変数変換公式を証明する．比較のために，まず一変数の場合の変数変換公式を挙げる．

定理 1　f を開区間 I 上の連続関数，g を開区間 J 上の滑らかな関数で，値域が I に含まれるものとする．このとき，任意の $a,b\in J$ に対して

$$\int_{g(a)}^{g(b)}f(u)du=\int_a^b f(g(t))g'(t)dt$$

が成りたつ．

証明　F を f の原始関数とし，$t \in I$ に対して $H(t)=F(g(t))$ と置く．合成法則により，

$$H'(t)=f(g(t))g'(t), \quad t \in I$$

が成りたつ．微積分の基本定理によって

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du=F(g(b))-F(g(a))=H(b)-H(a)=\int_a^b f(g(t))g'(t)dt. \qquad \dashv$$

二変数の場合の定理では，g は (s,t) 平面のある開領域から (x,y) 平面への滑らかな変換に，また g の導関数は変換のヤコビ行列式に置きかえなければならない．我々は初等閉領域上の二重積分ばかり扱って来たが，これでは変数変換定理には十分でない．なぜなら，初等閉領域の滑らかな変換による像はもはや初等閉領域とは限らないからである．この困難をうまく切りぬけるのには，古典的なジョルダン容量の理論を必要とする．これがあると，無限和定理が使えて変数変換定理が得られる．我々の主目標はこの無限和定理の適用の仕方である．だから，ジョルダン容量の理論の方は，超実数を使ってその概略を述べるだけにする．

D を平面の有界な集合とする．D を含む閉方形（辺が座標軸に平行なもの）全部の共通部分 E を D の**外接方形**と言う．正実数 $\Delta x, \Delta y$ に対し，ヨコ Δx，タテ Δy の小方形の格子への E の分割を考える．そのうち D に含まれる小方形の面積全部の総和を $\underline{C}(\Delta x, \Delta y)$，$D$ と交わる小方形の面積全部の総和を $\overline{C}(\Delta x, \Delta y)$ と書く．すると，任意の正の無限小 dx, dy に対しても $\underline{C}(dx,dy), \overline{C}(dx,dy)$ が定義される．任意の正の無限小 dx, dy に対して

$$\underline{C}(dx,dy) \approx \overline{C}(dx,dy)$$

が成りたつとき，D は**ジョルダン容量**をもつと言い，共通の標準部分 $A(D)$ を D のジョルダン容量と言う：

$$A(D)=st(\underline{C}(dx,dy))=st(\overline{C}(dx,dy)).$$

直観的には，D^* に含まれる無限小方形の面積の総和，および D^* と交わる無限小方形の面積の総和が互いに無限に近いということであり，その標準部分が $A(D)$ である．$A(D)$ のことを D の**面積**とも言う．

さて，有界集合 D がジョルダン容量 $A(D)$ をもつとし，D の閉包を含むある開領域上の連続関数を考える．これに対し，D 上の二重リーマン和および二重積分が初等閉領域の場合とまったく同様に定義される．すなわち，正の無限小 dx,

dy に対し，D の外接方形 E をヨコ dx，タテ dy の格子に分割し，

$$\sum\sum_{D} f(x, y)dxdy = \sum\sum_{(x_k, x_l)\in D^*} f(x_k, x_l)dxdy,$$

$$\iint_D f(x, y)dxdy = st\left(\sum\sum_D f(x, y)dxdy\right)$$

と定義する．ただし，第一式右辺の和は，無限小方形の左下スミの点 (x_k, x_l) が D^* に属するようなもの全部にわたって取る．

こうすると，二重積分の基本的な諸性質はそのままジョルダン容量をもつ集合上の二重積分の場合に一般化され，つぎの諸定理が得られる．

dx, dy の選びかたによらないこと　二重積分 $\iint_D f(x, y)dxdy$ は無限小 dx, dy の選びかたによらない．

加法性　D_1, D_2 がジョルダン容量をもち，$D_1 \cap D_2$ のジョルダン容量がゼロならば，$D = D_1 \cup D_2$ もジョルダン容量をもち，

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

柱形性　$(x, y)\in D$ に対して $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ なら

$$m\cdot A(D) \leqslant \iint_D f(x, y)dxdy \leqslant M\cdot A(D).$$

特に $f(x, y)=1$ と置けば，

$$A(D) = \iint_D 1\,dxdy$$

が得られる．だから，特に初等閉領域 D のジョルダン容量は第6章で定義した D の面積に等しい．

和の法則

$$\iint_D (f(x, y)+g(x, y))dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy + \iint_D g(x, y)dxdy.$$

これは二重リーマン和に対する類似の公式から出る．

つぎに滑らかな変換を定義する．

定義　D_0 を (s, t) 平面の開集合とする．D_0 上の**滑らかな変換** T とは，D_0 から (x, y) 平面への写像

$$T(s, t) = (x, y)$$

であって，成分関数 $x(s,t)$，$y(s,t)$ がともに D_0 上滑らか，すなわち連続な偏導関数をもつことである．D_0 の部分集合 D に対し，集合

$$T(D)=\{T(s,t)\ ;\ (s,t)\in D\}$$

を D の T による像と言う．

さらに，D_0 上の実数値関数

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}$$

を滑らかな変換 T の**ヤコビ行列式**と言い，$J(T)$ または $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$ と書く．仮定により，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$ は D_0 上の連続関数である．

たとえば極座標変換

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

は滑らかな変換で，そのヤコビ行列式は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r$$

である．

我々はつぎの二つの補題を必要とする．証明は大抵の高等微積分教科書に載っているから省略する．

補題 2　T を開集合 D_0 上の滑らかな一対一変換で，そのヤコビ行列式が 0 でないものとする．D を D_0 に含まれる有界閉集合でジョルダン容量をもつとする．

（ｉ）　$T(D_0)$ は開集合である．

（ii）　$T(D)$ は有界集合でジョルダン容量をもつ．

（iii）　T によって D の内部は $T(D)$ の内部に，D の境界は $T(D)$ の境界に移る．

補題 3　開集合 D_0 上の滑らかな変換 T のヤコビ行列式が 0 でないとし，偏導関数 $\dfrac{\partial x}{\partial s}$，$\dfrac{\partial x}{\partial t}$，$\dfrac{\partial y}{\partial s}$，$\dfrac{\partial y}{\partial t}$ がすべて D_0 で有界だとする．このとき，任意

の正実数 ε に対してある正実数 δ を取ると，D_0 の含まれる正方形 ΔD の一辺 Δs が δ より小さければ，

$$|A(T(\Delta D))-|J(T)|\Delta s^2|<\varepsilon\Delta s^2$$

が成りたつ．すなわち，正方形 ΔD の像の面積は，誤差 $\varepsilon\Delta s^2$ の範囲で，正方形 ΔD の面積にヤコビ行列式の絶対値を掛けたものに等しい．

数 $|J(T)|\Delta s^2$ は，$T(s,t)$ を一つの頂点とし，辺を表わすベクトルが

$$\Delta s\left(\frac{\partial x}{\partial s}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial s}\boldsymbol{j}\right),\qquad \Delta s\left(\frac{\partial x}{\partial t}\boldsymbol{i}++\frac{\partial y}{\partial t}\boldsymbol{j}\right)$$

であるような平行四辺形の面積である．

証明は，$T(D)$ の境界がこの平行四辺形の境界に近いことを示すことによる．

変数変換定理　開集合 D_0 上の滑らかな変換 T が一対一で，0 でないヤコビ行列式をもつとする．このとき，$T(D_0)$ 上の任意の連続関数 $f(x,y)$ および D_0 に含まれる任意の初等閉領域 D に対して

$$\iint_{T(D)} f(x,y)dxdy=\iint_D f(T(s,t))|J(T)|dsdt$$

が成りたつ．

たとえば (r,θ) 平面の初等閉領域

$$D=\{(r,\theta)\,;\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\ a(\theta)\leqslant r\leqslant b(\theta)\}$$

を考える．ただし，

$$\alpha\leqslant\beta<\alpha+2\pi,\qquad 0<a(\theta)\leqslant b(\theta)$$

とする．このとき，極座標変換 T は定理の条件をみたし，公式

$$\iint_{T(D)} f(x,y)dxdy=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

が得られる．実際，条件 $\beta<\alpha+2\pi$ によって T は一対一であり，条件 $0<a(\theta)$ によって $J(T)=r\neq 0$ である　これから極限移行によって，この公式が

$$\alpha\leqslant\beta\leqslant\alpha+2\pi,\qquad 0\leqslant a(\theta)\leqslant b(\theta)$$

の場合にも成りたつことが分る．

定理の証明　D を D_0 に含まれる初等閉領域とする．前節の補題2により，関数 $x(s,t)$，$y(s,t)$ の偏導関数はどれも D_0 上有界と仮定してよい．同様に，$f(T(s,t))$ は D_0 上有界，したがって $f(x,y)$ は $T(D_0)$ 上有界と仮定してよい．

1° まず，$T(D_0)$ 上 $f(x,y)\geqq 0$ の場合に証明する．D_0 に含まれる各初等閉領域 D_1 に対して

$$B(D_1)=\iint_{T(D_1)} f(x,y)dxdy$$

と定義する．柱形性により，任意の D_1 に対して $B(D_1)\geqq 0$．$D_1=D_2\cup D_3$ で，D_2, D_3 の内部が共通点をもたなければ，$T(D_1)=T(D_2)\cup T(D_3)$ であり，また，この節の補題1により，$T(D_2)$，$T(D_3)$ の内部は共通点をもたない．したがって，積分の加法性により，$B(D_1)=B(D_2)+B(D_3)$ となる．

Δs を正の無限小とし，$\Delta t=\Delta s$ と置く．この節の補題2および解の公理により，

$$A(T(\Delta D))\approx |J(T)|\Delta s^2 \qquad (\Delta s^2 \text{ に比べて}),$$

すなわち

$$\frac{A(T(\Delta D))}{\Delta s^2}\approx |J(T)|$$

が成りたつ．超実最大最小値の定理により，$f(x,y)$ は $T(\Delta D)$ 上の最大値 M，最小値 m をもつ．T は連続だから，$T(\Delta D)$ の点はすべて $T(s,t)$ に無限に近い．ただし，(s,t) は正方形 ΔD の左下スミの点である．柱形性および解の公理により，

$$m\cdot A(T(\Delta D))\leqq B(\Delta D)\leqq M\cdot A(T(\Delta D))$$

が成りたつから，

$$B(\Delta D)\approx f(T(s,t))\cdot A(T(\Delta D)) \quad (A(T(\Delta D)) \text{ に比べて})$$

となり，したがって

$$\frac{B(\Delta D)}{\Delta s^2}=\frac{B(\Delta D)}{A(T(\Delta D))}\frac{A(T(\Delta D))}{\Delta s^2}\approx f(T(s,t))|J(T)|$$

となる．よって

$$B(\Delta D)\approx f(T(s,t))|J(T)|\Delta s^2 \quad (\Delta s^2 \text{ に比べて})$$

を得る．したがって無限和定理により，

$$B(D)=\iint_D f(T(s,t))|J(T)|dsdt$$

が成りたつ．

2° 一般の場合には，f が D_0 上有界だから，D_0 上 $f(x,y)\geqq -c$ となるような正実数 c を取る．すると $f(x,y)+c\geqq 0$ だから，1° の結果によって

$$\iint_{T(D)}(f(x,y)+c)dxdy=\iint_D (f(T(s,t))+c)|J(T)|dsdt,$$

$$\iint_{T(D)} c\,dxdy=\iint_D c|J(T)|dsdt$$

が成りたつ．積分の和の公式により，

$$\iint_{T(D)} f(x,y)dxdy=\iint_{T(D)} (f(x,y)+c)dxdy-\iint_{T(D)} c\,dxdy$$

$$=\iint_D (f(T(s,t))+c)|J(T)|dsdt-\iint_D c|J(T)|dsdt$$

$$=\iint_D f(T(s,t))|J(T)|dsdt.$$

⊣

例　$x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=x^2$ で囲まれる部分の体積 V を求める．問題の部分は図のようになる．V は，平面領域

$D=\{(r,\theta)\ ;\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 1\}$

上の関数を積分することによって得られる．

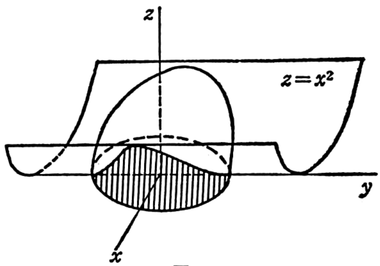


図 27

$$V=\iint_D x^2dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 x^2r\,drd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1(r\cos\theta)^2r\,drd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,drd\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cos^2\theta\,d\theta=\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

練 習 問 題 12 D

1.　つぎの領域の体積を求めよ．

（1）　$x^2+y^2\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant x^2+y^2$　　（2）　$x^2+y^2\leqslant 4,\ 0\leqslant z\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$

（3）　$x^2+y^2\leqslant 25,\ 0\leqslant z\leqslant e^{-x^2-y^2}$　　（4）　$0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\ 0\leqslant z\leqslant x\sqrt{y}$

2.　（a）　$\iint_{R^2}e^{-x^2-y^2}dA=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2-y^2}dxdy$ を示せ．

（b）　上の結果を使って $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$ を求めよ．

索　　引

ア　行

カ　行

サ　行

タ 行

ナ 行

ハ 行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

あとがき

無限小解析をさらに深く勉強するのにはつぎのような本がある.

[1] A. Robinson. *Non-standard analysis* (第2版). North-Holland (1974)

[2] K. Stroyan & W.A.J. Luxemburg. *Introduction to the theory of infinitesimals*. Academic Press (1976)

上級微積分のよい教科書を二つ挙げておく.

[3] R. C. Buck & E. F. Buck. *Advanced Calculus* (第2版). McGraw Hill (1956).

[4] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw Hill (1964)

訳者追記　この本よりあとで出た本および日本語の文献を挙げる.

[5] M. Davis. *Applied Nonstandard analysis*. Wiley (1976)

[6] 齋藤正彦. 超積と超準解析. 東京図書 (1976)

[7] 齋藤正彦. 無限小解析. 数学セミナー (1977.1～12)

訳者紹介

齋藤正彦（さいとう まさひこ）
1931年　東京生れ
1954年　東京大学理学部数学科卒業
1962年　東京大学教養学部助教授
1974年　東京大学教養学部教授
理学博士
著　書　線型代数入門（東大出版会）
　　　　超積と超準解析（東京図書）

無限小解析の基礎 ―微積分の新手法―　¥1500

1979年3月30日　第1刷発行　Printed in Japan
1979年9月10日　第3刷発行

著　者　H. J. キースラー
訳　者　齋　藤　正　彦
発行所　東京図書株式会社
〒112 東京都文京区水道 2-5カキビル
振替東京 4-13803 電話(814)7818〜9

検印省略

3341-2133-5160